١٢



حكومەتی هەرێمی كوردستان- عێراق
وەزارەتی پەروەردە - بەڕێوەبەرایەتی گشتی پرۆگرام و چاپەمەنییەكان

بیركاری بۆ هەمووان

كتێبی خوێندكار
پۆلی دوازدەهەمی زانستی

چاپی شەشەم
٢٠١٥ ز / ٢٧١٥ كوردی / ١٤٣٦ ك

سەرپەرشتی هونەری چاپ

عوسمان پیرداود کواز

ئاری محسن احمد

بـــەشـــی

1

وێنە ڕوونکردنەوەییەکان و نموونە هێڵییەکان

Graphs and Linear Models

بـــەشـــی

2

ئامانجەکان

Limits

بـەشـی

3

داتاشراو

Derivative

بـــەشـــی

4

جێبەجێکردنی داتاشراو

Applications of Differentiation

بەشی

5

تەواوکاری

Integration

بـەشـی

6

بڕگە قوچەکییەکان
Conic Sections

بەشی

7

ژمارە ئاوێتەکان و ئەندازە

Complex Numbers And Geometry

بەشی

1

وێنە ڕوونکردنەوەییەکان و نموونە هێڵییەکان

Graphs and Linear Models

بەشی یەکەم

وانەکان

نموونە هێڵییەکان لەو نموونانە دادەنرێت کە بە فراوانی بڵاوبۆتەوە و بەکاردەهێنرێت لە بواری ئابووری و پیشەسازی و هەروەها لە بوارە زانستییەکانی تر، نموونەش لەسەر ئەمە، ئەو نموونەیەیە کە پانی هەردوو باڵی فڕۆکە w و بە درێژییەکەی l بە یاسای $w = 1.2l - 60$ دەبەستێتەوە بۆ هەندێك جۆر لە فڕۆکەکان.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

1 هەر دەستەواژەیەکی ستوونی لای ڕاست بە لێکدانەوەکەی لە ستوونی لای چەپ ببەستەوە.

1. نەخشە
2. گۆڕاوی ئازاد
3. گۆڕاوی پەیوەست
4. بواری نەخشەی f
5. نەخشەی ڕێسا پەلدار

أ. کۆمەڵەی بەهایەکانی x کە ڕێگا بە هەژمارکردنی بەهای $f(x)$ دەدات.

ب. گۆڕاوێکە بەهایەکەی بەپێی بەهای گۆڕاوی ئازاد لە پەیوەندییە نەخشەییەکە دیاردەکرێت.

ج. نەخشەیەکە ڕێسایەکەی بەشێوەی جیاجیا لەماوەی جیاجیادا پێناسە دەکرێ.

د. پەیوەندییە لەنێوان دوو گۆڕاو کە بەهای هەر یەکێکیان بەتەنها یەك بەها بۆ ئەوی تریان دیاریدەکات.

هـ. کۆمەڵەی بەهایەکانی $f(x)$ کە لەتواناداییە.

و. گۆڕاوێکە بەهایەکانی گۆڕاوی پەیوەست لە پەیوەندیەکی نەخشەییدا دیاریدەکات.

بواری نەخشە

لە ڕاهێنانی 2 تا 7 ، بواری نەخشەکە بدۆزوە.

2 $f(x) = |x-1| + 2$

3 $f(x) = -2 + \sqrt{1-x}$

4 $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

5 $f(x) = \sqrt[3]{2-x}$

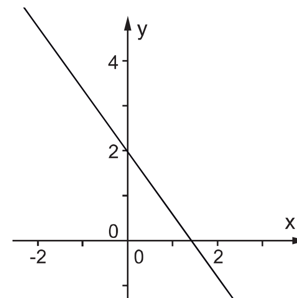
6 $f(x) = \tan x$

7 $f(x) = x^{2/5}$

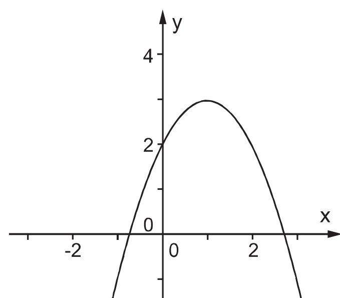
خوێندنەوەی ڕوونکردنەوەکان

لە ڕاهێنانی 8 و 9 ، ڕێسای نەخشە پەلداری ڕوونکردنەوەکە بنووسە.

8



9



1-1

وێنە ڕوونکردنەوەییەکان
Graphs



ڕێنیە دیکارت (1596–1650)
René Descartes
دیکارت بەشداریەکی کاریگەری کردووە لە پێشخستنی فەلسەفە و زانست و بیرکاری وبیرۆکەی نواندنی خاڵ وەك جووتە ڕێکخراوێك لە ڕووتەخت و نواندنی چەماوەکان بە هاوکێشەی جەبری و بە پێچەوانەوە بۆ ئەو دەگەڕێتەوە. ئەو بیرۆکانەی لە کتێبەکەی خۆی La Géométrie باسکردووە کە ساڵی 1637 بڵاوکراوەتەوە.

ئامانجەکان

- ڕوونکردنەوەی پەیوەندی بە پێی هاوکێشەکەی دەکێشێت.
- یەکتربڕینەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشە لەگەڵ تەوەری پۆوتانەکان دەدۆزێتەوە.
- هاوجێبوونی ڕوونکردنەوەی نەخشە بە دەوری تەوەری y یان خاڵی بنەڕەت لە ڕووتەختی پۆوتانەکان تاقیدەکاتەوە.
- خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەییەکانی دوو نەخشە دەدۆزێتەوە.

زاراوەکان
Vocabulary

خاڵی شیکار
Solution point

خشتەی بەهایەکان
Table of values

یەکتربڕینی ئاسۆیی
x-Intercept

یەکتربڕینی ستوونی
y-Intercept

لاری Slope

هاوجێبوون Symmetry

خاڵی یەکتربڕین
Point of intersection

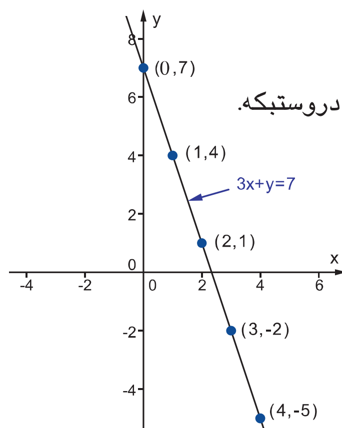
نموونە هێڵییەکان
Linear Models

ڕوونکردنەوەی نەخشە

ساڵی 1637 زانای بیرکاری فەرەنسی ڕێنیە دیکارت شۆڕشێکی لە لێکۆڵینەوەی بیرکاری بەرپاکرد، کاتێك هەردوو لقە سەرەکییەکەی بیرکاری (جەبر و ئەندازە)ی بەیەکەوە بەستەوە، ئەمەش وایکرد بە بەکارهێنانی ڕووتەختە پۆوتانەکانی دیکارت بتوانین جەبریانە چەمکە ئەندازەییەکان دەربڕین و چەمکە جەبرییەکان ئەندازەییانە بنوێنین. ئەم لێکنزیکبوونەوە بەهێزە زۆر لە بابەتەکانی هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری لەماوەی سەدەیەك پێشخست.

لەم کتێبەدا بەدوای ئەو لێکنزیکبوونەوە دادەچین کە هاوشێوەی لێکۆڵینەوەمانە لە جیاکاری و تەواوکاریدا. و بیرۆکەکانی ئەو لقەی بیرکاری بە ڕوونکردنەوەیی و بەجەبری و بە ژمارەیی دەخەینەڕوو، بۆئەوەی لە چەمکە بنچینەییەکانی بگەیت، هاوکێشەی $3x + y = 7$ بەکاربهێنە کە $(2, 1)$ **خاڵی شیکاری** ئەو هاوکێشەیە پێکدەهێنێت، چونکە بە لەجیاتیدانانی x بە 2 و y بە 1 هاوکێشەکە پاسادان دەکات. ئەم هاوکێشەیە چەندین شیکاری تری هەیە وەك $(1, 4)$، $(0, 7)$. بۆ ئەوەی هەموو شیکارەکانی بدۆزیتەوە. هاوکێشەکە بەپێی y شیکاربکە:

لێکنزیکبوونەوەی جەبری $y = 7 - 3x$



پاشان **خشتەی بەهایەکان** بە لەجیاتی دانانی چەند بەهایەك بۆ x دروستبکە.

لێکنزیکبوونەوەی ژمارەیی

x	0	1	2	3	4
y	7	4	1	–2	–5

بەپێی خشتەکە دەتوانیت بڵێیت کە $(0, 7)$، $(1, 4)$، $(2, 1)$، $(3, -2)$، $(4, -5)$ شیکارن بۆ هاوکێشەی سەرەکی $3x + y = 7$.

بەڵام ئەم هاوکێشەیە وەك زۆربەی هاوکێشەکان ژمارەیەکی ناکۆتا شیکاری هەیە و هەر شیکارێك خاڵێك لە ڕووتەختی پۆوتان دیاریدەکات. کۆمەڵەی ئەو خاڵە شیکاریانە **ڕوونکردنەوەی هاوکێشەکە** پێکدەهێنێت.

لەم کتێبەدا زۆر ڕێگا بۆ کێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکان و هاوکێشەکان فێردەبیت، لەو ڕێگایانە و ئاسانترینیان دیاریکردنی چەند خاڵێکی شیکارەکە بەسە بۆ دیارکردنی شێوەی ڕوونکردنەوەکە، پاشان ئەو خاڵانە بە هێڵی گونجاو پێکبگەیێنە.

لەبیرت بێت

بۆ وێنەکێشانی ڕاستەهێڵێك پێویستە بە زانینی دوو خاڵ کە پێیاندا دەڕوات.

نموونـــــه 1 کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەخاڵەکان

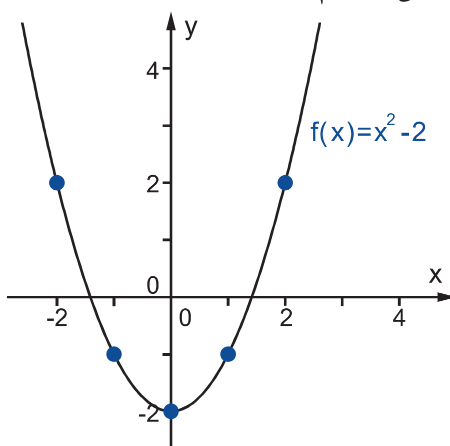
وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^2-2$ بکێشە.

شیکار

بە دروستکردنی خشتەی بەهاکان دەستپێبکە.

x	–2	–1	0	1	2	3
y	2	–1	–2	–1	2	7

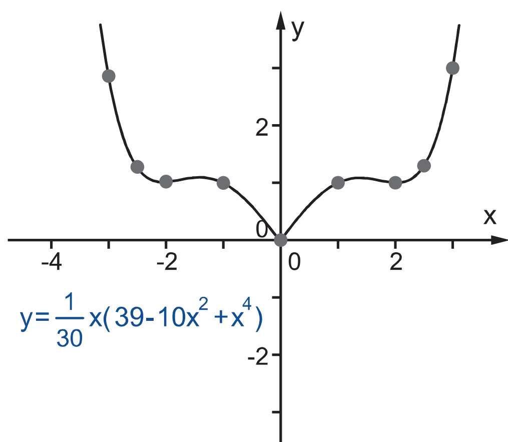
خاڵەکانی خشتەکە بنوێنە، لە پاشاندا بە هێڵێکی چەماوەیی گونجاو بە یەکیان بگەینە، وەك لە وێنەی بەرامبەر دەردەکەوێت. ئەو ڕوونکردنەوەیە **برگەی هاوتایە**، کە بریتییە لە یەکێك لە برگە قوچەکییەکان کە لە بەشی شەشەم ئاشنای دەبیت.

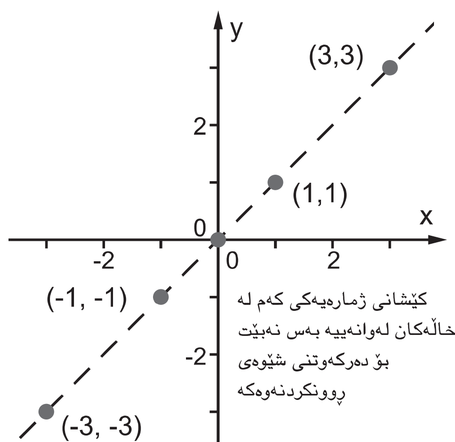




1. وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=1-x^2$ بکێشە.

هەروەك بینیت کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەخاڵەکان کارێکی ئاسانە. بەڵام ئەویش لە کەموکوڕی بەدەرنییە. هەندێك جار بۆئەوەی بیرۆکەیەکی تەواوت لەسەر شێوەی ڕوونکردنەوەکە لا دروستبێت پێویستت بە دیاریکردنی خاڵی زۆر دەبێت، وەك چۆن لە نموونەی $f(x)=\frac{1}{30}x(39-10x^2+x^4)$ دەبینیت دیاریکردنی ژمارەیەکی کەم لە خاڵەکان دەرئەنجامێکی هەڵەت لە بارەی وێنەکە بۆ دروست دەبێت. ئەگەر خاڵەکانی $(-3,-3)$و $(-1,-1)$ و $(0,0)$ و $(1,1)$ و $(3,3)$ دیاربکەیت وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە وەك هێڵێکی ڕاست دەردەکەوێت هەروەك چۆن لە وێنە ڕوونکردنەوەیی لای ڕاستی لاپەرەی دێت دیارە، بەڵام بەدیاریکردنی خاڵی زیاتر بۆت دەردەکەوێت وێنەی ڕوونکردنەوەکە لە ڕاستییدا ئاڵۆزترە لەوەی دەرکەوت هەروەك لە وێنەی ڕوونکردنەوەیی لای چەپی لاپەرەی دێت دیارە.





یەکتربڕین لەگەڵ تەوەرەکان

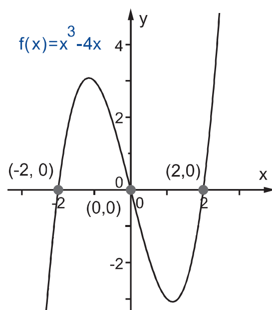
دەتوانی لە خاڵە شیکارییەکان هەندێکیان بە ئاسانی بدۆزییەوە ئەویش ئەو خاڵانەن کە یەکێك لە پۆوتانەکانی دەکاتە 0 . بەو خاڵانە دەوترێت **خاڵەکانی یەکتربڕین** لەگەڵ تەوەری پۆوتانەکان. بەو خاڵەی پۆوتانی یەکەمی x بکاتە 0 ، واتە خاڵی $(0, b)$ دەبێتە خاڵی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەگەڵ تەوەری y . کە دەکاتە **یەکتربڕینی ستوونی**. و ئەو خاڵانەی پۆوتانی دووەمی دەکاتە 0 ، واتا خاڵی $(a, 0)$ دەبێتە خاڵی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەگەڵ تەوەری x . کە دەکاتە **یەکتربڕینی ئاسۆیی**.

پۆوتانی x کە یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f دەنوێنت بریتییە لە ڕەگەکانی هاوکێشەی $f(x)=0$. لەوانەیە نەخشەکە خاڵەکانی یەکتربڕینی ئاسۆیی نەبێت یان یەك خاڵ یان زیاتری هەبێت. بەڵام یەکتربڕینەکانی ستوونی بریتییە لە $f(0)$ ئەگەر 0 لە بواری نەخشەدا بێت. لەمەوە و لە سیفەتەکانی نەخشە دەردەچێت، بۆ نەخشەیەك بە لایەنی زۆرەوە یەك خاڵی یەکتربڕینی ستوونی دەبێت.

نموونـــــە 2 دۆزینەوەی یەکتربڕینە ئاسۆییەکان و ستوونییەکان

یەکتربڕینە ئاسۆییەکان و ستوونییەکان بۆ ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^3-4x$ بدۆزەوە.

شیکار



بۆ دۆزینەوەی یەکتربڕینە ئاسۆییەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^3-4x$. ئەم هاوکێشەیە شیکار بکە.

$$f(x)=0$$

$$x^3-4x=0$$

$$x(x-2)(x+2)=0$$

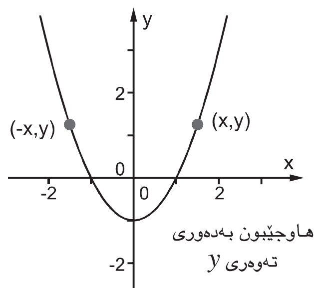
ڕەگەکانی هاوکێشەکە دەکاتە -2 و 0 و 2 ، واتە 3 یەکتربڕینی ئاسۆیی هەیە ئەوانیش $(-2, 0)$ ، $(0, 0)$، $(2, 0)$. لەبەرئەوەی 0 لەبواری نەخشەکە دایە، بۆیە ڕوونکردنەوەکە تەنها یەك یەکتربڕینی ستوونی هەیە ئەویش $(0, f(0))$ ، $(0, 0)$.



2. یەکتربڕینە ئاسۆییەکان و ستوونییەکان بۆ ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^4-1$ بدۆزەوە.

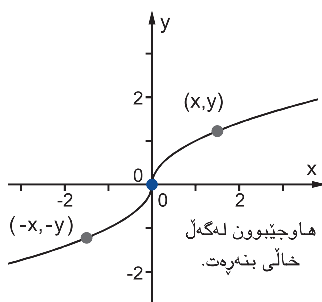
تەكنۆلۆژیا لە نموونەی 2 بۆ دۆزینەوەی یەكتربڕینەكان ڕێگای جەبریت بەكارهێنا. ئەگەر لەتواناتدا نەبوو بە بەكارهێنانی جەبر یەكتربڕینەكان بدۆزیتەوە، ئەوا ڕێگای ڕوونكردنەوەیی بەكاربهێنە، بەدیاریكردنی خاڵەكانی یەكتربڕینی ڕوونكردنەوەی نەخشەكە لەگەڵ دوو تەوەری پۆوتانەكان.

هاوجێبوونی ڕوونكردنەوەی نەخشەكان



ئەگەر زانیت كە ڕوونكردنەوەی نەخشەكە لەگەڵ ڕاستەهێڵێك یان خاڵێك هاوجێیە، ئەمە وادەكات كێشانی ڕوونكردنەوەكە ئاسانتربێت. ئەوەندە بەسە وێنەی نیوە ڕوونكردنەوەكە بكێشیت لە پاشاندا وێنەكە بە بەكارهێنانی هاوجێبوون تەواو بكەیت.

دەتوانی ئەم دوو جۆر هاوجێبوونەی خوارەوە بەكاربهێنی.

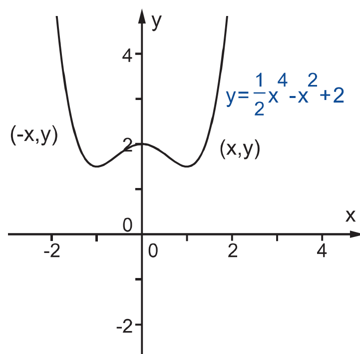


1. هاوجێبوون لەگەڵ تەوەری y : ڕوونكردنەوەی نەخشەی f هاوجێدەبێت لەگەڵ تەوەری y ، ئەگەر f ئەم مەرجە جێبەجێبكات $f(-x)=f(x)$، بۆ هەموو بەهایەكی x كە لەبواری نەخشەكە دابێت، واتا كاتێك نەخشەكە جووتبێت.

2. هاوجێبوون لەگەڵ خاڵی بنەڕەت: ڕوونكردنەوەی نەخشەی f هاوجێدەبێت لەگەڵ خاڵی بنەڕەت، ئەگەر f ئەم مەرجە $f(-x)=-f(x)$ جێبەجێبكات، بۆ هەموو بەهایەكی x كە لەبواری نەخشەكە دابێت، واتا كاتێك نەخشەكە تاك بێت.

لەبیرت بێت

ڕادەی نەگۆڕ لە هاوكێشەی نەخشەی ڕادەدار، بریتییە لە ئەنجامی لێكدانی ژمارەیەك لە ($x^0 = 1$)، 0 ژمارەیەكی جووتە.

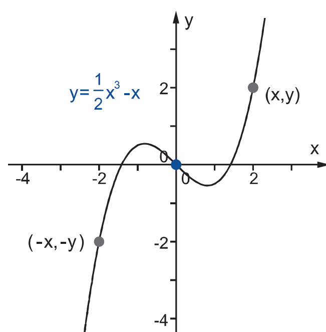


تاقیكردنەوەی هاوجێبوون

1. ڕوونكردنەوەی نەخشەكە هاوجێدەبێت لەگەڵ تەوەری y ئەگەر نەخشەكە جووتبێت.
2. ڕوونكردنەوەی نەخشەكە هاوجێدەبێت لەگەڵ خاڵی بنەڕەت ئەگەر نەخشەكە تاك بێت.

لەبیرت بێت

ڕادەی نەگۆڕ لە هاوكێشەی نەخشەی ڕادەدار، بریتییە لە ئەنجامی لێكدانی ژمارەیەك لە ($x^0 = 1$)، 0 ژمارەیەكی جووتە.

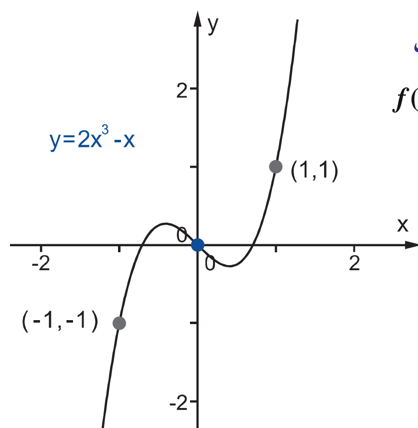


ڕوونكردنەوەی نەخشەی ڕادەدار هاوجێدەبێت لەگەڵ تەوەری y ، ئەگەر پلەكانی هەموو ڕادەكانی هاوكێشەكە جووتبێت جگەلە ڕادە نەگۆڕەكە. ڕوونكردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^2+2$ هاوجێدەبێت لەگەڵ تەوەری y . هەروەها ڕوونكردنەوەی نەخشەیەكی ڕادەدار هاوجێدەبێت لەگەڵ خاڵی بنەڕەت ئەگەر ڕادە نەگۆڕەكەی هاوكێشەكە بكاتە 0 و پلەكانی هەموو ڕادەكان لەو هاوكێشەدا تاك بێت.
بۆنموونە: ڕوونكردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{2}x^3-x$ هاوجێیە لەگەڵ خاڵی بنەڕەت.

نموونـــــه 3

تاقیکردنەوەی هاوجێبوون لەگەڵ خاڵی بنەڕەت

ڕوونیبکەوە کە، ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=2x^3-x$ هاوجێیە لەگەڵ خاڵی بنەڕەت.



شیکار

تەنها دیاریکردنی تاك بوونی نەخشەکە بەسە.

$$f(-x)=2(-x)^3-(-x)=-2x^3+x$$
$$=-(2x^3-x)=-f(x)$$

ئەمەش بۆهەموو بەهایەکی x.



3. ڕوونیبکەوە، ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=2x^4-x^2+2$ هاوجێیە لەگەڵ تەوەری y.

نموونـــــه 4

بەکارهێنانی یەکتربڕینەکان و هاوجێبون بۆ کێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکان.

ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}-1$ بکێشە.

شیکار

ڕوونکردنەوەکە هاوجێیە لەگەڵ تەوەری y چونکە نەخشەکە جووتە.

$$f(-x)=\frac{2(-x)^2}{(-x)^2+1}-1=\frac{2x^2}{x^2+1}-1=f(x)$$

ئەوەندە بەسە نیوەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بۆ بەهایە موجەبەکانی بکێشی. لەپاشاندا نیوەکەی تر بە وێنەدانەوە لەگەڵ تەوەری y بکێشیت.

یەکتربڕینەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە دیاریبکە.

یەکتر بڕینە ستوونیەکان: دەکاتە خاڵی $(0, f(0))$ یان $(0,-1)$.

یەکتربڕینە ئاسۆییەکان: پێویستە شیکاری هاوکێشەی $\frac{2x^2}{x^2+1}-1=0$ بکەیت.

هاوکێشەی $\frac{2x^2}{x^2+1}-1=0$ پاش سادەکردن دەبێتە $x^2-1=0$

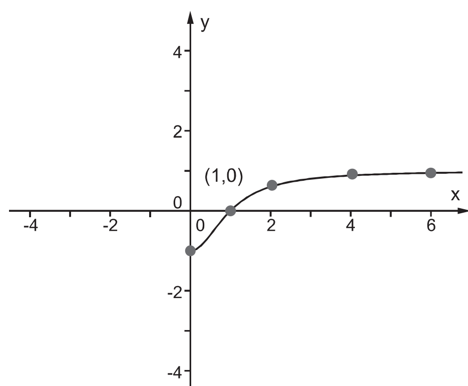
ئەم هاوکێشەیە دوو ڕەگی هەیە ئەوانیش $x=-1$ و $x=1$.

کەواتە نەخشەکە، دوو یەکتربڕینی ئاسۆیی هەیە ئەوانیش $(-1,0)$ و $(1,0)$.

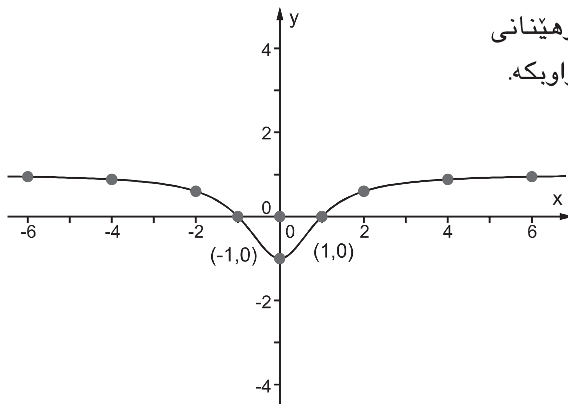
خاڵەکانی تر لەسەر بەشی لای ڕاستی ڕوونکردنەوەکە دیاریبکە: $(2, f(2))$ یان $\left(2, \frac{3}{5}\right)$، $(4, f(4))$ یان $\left(4, \frac{15}{17}\right)$، $(6, f(6))$ یان $\left(6, \frac{35}{37}\right)$.

نیوەی لای ڕاست بکێشە

(سەربە بەها موجەبەکانی x).



وێنەی ڕوونکردنەوەکە بە بەکارهێنانی
وێنەدانەوە لەگەڵ تەوەری y تەواوبکە.





4. وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ بکێشە.

دۆزینەوەی خاڵەکانی یەکتربڕینی دوو نەخشە

هەر خاڵێکی ڕووتەختی پۆوتان لە نێوان ڕوونکردنەوەی دوو نەخشەکە هاوبەشە دەکاتە **خاڵی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی** ئەو دوو نەخشەیە. بۆ دۆزینەوەی خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەکانی دوو نەخشە f و g ، هاوکێشەی $f(x)=g(x)$ شیکاربکە. ڕەگەکانی ئەم هاوکێشەیە بریتییە لە پۆوتانەکانی x بۆ خاڵەکانی یەکتربڕین.

نموونـــــە 5

دۆزینەوەی خاڵەکانی یەکتربڕینی دوو نەخشە.

خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^2-3$ و $g(x)=x-1$ بدۆزەوە.

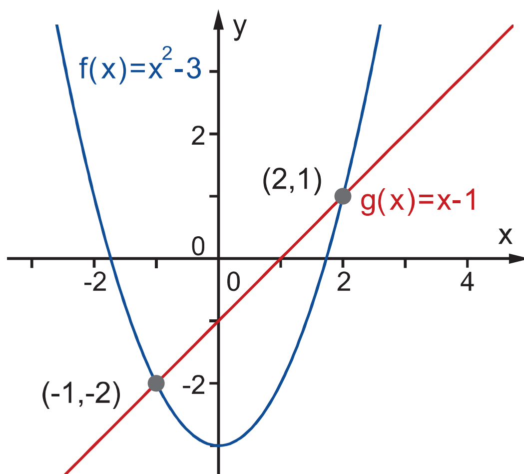
شیکار

دەستبکە بە شیکارکردنی $f(x)=g(x)$ یان $x^2-3=x-1$ کە دەبێتە $x^2-x-2=0$.

ئەم هاوکێشە دووجایە دوو ڕەگی هەیە ئەوانیش $x=-1$ و $x=2$. ڕوونکردنەوەکانی ئەم دوو نەخشەیە یەکتری دەبڕن لە دووخاڵی:

$(-1,\ f(-1))=(-1,\ g(-1))=(-1,\ -2)$

و $(2,\ f(2))=(2,\ g(2))=(2,\ 1)$



ئەوەی دەستتکەوت بەهۆی ڕوونکردنەوەی دوو نەخشەکە و دیاریکردنی خاڵەکانی یەکتربڕینیان پاسادان بکە.

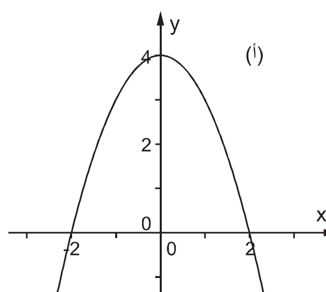


5. خاڵەکانی یەکتربڕینی هەردوو ڕوونکردنەوەی نەخشە $f(x)=x^3-x$ و $g(x)=\frac{1}{4}(x^2-1)$ بدۆزەوە.

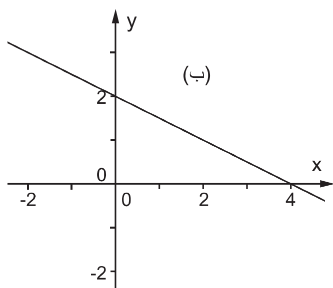
1-1 ڕاهێنان

لە پرسیاری 1 تا 4 ڕوونکردنەوەی نەخشەکە دیاریکە.

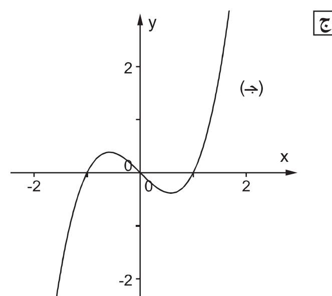
أ



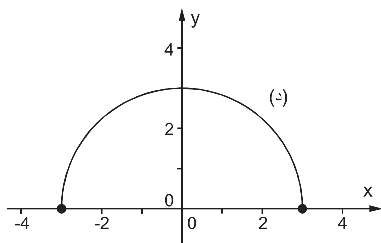
ب



ج



د



1 $f(x)=-\frac{1}{2}x+2$ **2** $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

3 $f(x)=4-x^2$ **4** $f(x)=x^3-x$

لە پرسیاری 5 تا 10 ، وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بە خاڵەکان بکێشە.

5 $f(x)=6-2x$ **6** $f(x)=(x-3)^2$ **7** $f(x)=|x+2|$

8 $f(x)=\sqrt{x+2}$ **9** $f(x)=\frac{2}{x}$ **10** $f(x)=\frac{1}{x-1}$

لە پرسیاری 11 تا 14 یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەگەڵ دوو تەوەری پۆتانەکان بدۆزەوە.

11 $f(x)=x^2+x-2$ **12** $f(x)=x^2\sqrt{25-x^2}$

13 $f(x)=(x-1)\sqrt{x^2+1}$ **14** $f(x)=\frac{x^2+3x}{(3x+1)^2}$

لە پرسیاری 15 تا 20 دیاریکە، ئەگەر ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەگەڵ تەوەری y یان لەگەڵ خاڵی بنەڕەت هاوجێیە.

15 $f(x)=x^2-2$ **16** $f(x)=x^2-x$ **17** $f(x)=\frac{4}{x}$

18 $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ **19** $f(x)=|x^3+x|$ **20** $f(x)=1-\sqrt{x+3}$

لە پرسیاری 21 تا 24 خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی هەر دوو نەخشەکە بدۆزەوە.

21 $f(x)=2-x$ و $g(x)=2x-1$

22 $f(x)=6-x^2$ و $g(x)=4-x$

23 $f(x)=x^3-2x^2+x-1$ و $g(x)=-x^2+3x-1$

24 $f(x)=-|2x-3|+6$ و $g(x)=6-x$

25 **خاڵی بەسوود** ئابووریناسان دەڵێن قازانجی دەزگایەك گەیشتۆتە **خاڵی بەسوود** كاتێك تێچوونی بەرهەمهێنان و دەستكەوتی فرۆشتن یەكسانبن. خاڵی بەسوود بۆ دەزگایەك بدۆزەوەكە نەخشەی تێچوونی بكاتە $C = 5\sqrt{x}$ و نەخشەی دەستكەوتی بكاتە $R = 3x$.

دەربارەی چەمكەكان

26 هاوكێشەی نەخشەیەك بنووسە، یەكتربڕینە ئاسۆییەكانی. $x = -2$، $x = 4$، $x = 6$ بێت.

27 خاڵەكانی هەر خشتەیەك شێكاری هاوكێشەیەكن لەم چوار هاوكێشانە:

أ $y = kx + 5$　ب $y = x^2 + k$　ج $y = kx^{\frac{3}{2}}$　د $xy = k$

خشتەی هەر هاوكێشەیەك دیاربكە، و بەهای k دیاربكە. ڕێگای كاركردنت ڕوونبكەوە.

✶

x	1	4	9
y	3	24	81

✶✶

x	1	4	9
y	7	13	23

✶✶✶

x	1	4	9
y	36	9	4

✶✶✶✶

x	1	4	9
y	−9	6	71

ڕاست یان هەڵە؟ لە پرسیاری 28 تا 31 ، دیاربكە ئەگەر ڕستەكە ڕاستە هۆیەكەی لێكبدەوە، یان ئەگەر هەڵەیە بە دژە نموونەیەك بیسەلمێنە.

28 ئەگەر خاڵی $(1, -2)$ بكەوێتە سەر ڕوونكردنەوەیەك هاوجێبێت لەگەڵ خاڵی بنەڕەت ئەوا خاڵی $(-1, -2)$ دەكەوێتە سەر هەمان ڕوونكردنەوەكە.

29 ئەگەر خاڵی $(1, -2)$ بكەوێتە سەر ڕوونكردنەوەیەك هاوجێبێت لەگەڵ تەوەری y ئەوا خاڵی $(-1, -2)$ دەكەوێتە سەر هەمان ڕوونكردنەوەكە.

30 ئەگەر $b^2 - 4ac > 0$ و $a \neq 0$ ئەوا ڕوونكردنەوەی نەخشەی $f(x) = ax^2 + bx + c$ دوو یەكتربڕینی ئاسۆیی جیاوازی هەیە.

31 ئەگەر $b^2 - 4ac = 0$ و $a \neq 0$ ئەوا ڕوونكردنەوەی نەخشەی $f(x) = ax^2 + bx + c$ یەك یەكتربڕینی ئاسۆیی هەیە.

32 هاوكێشەی ئەو ڕوونكردنەوە بدۆزەوە كە پێكدێت لەهەموو ئەو خاڵانەی ڕووتەختی پۆوتانی (x, y) كە دوورییەكەی لە خاڵی بنەڕەت دەكاتە دوو ئەوەندەی دوورییەكەی لە خاڵی $(0, 3)$.

2-1 نموونە هێڵییەکان و تێکرای گۆڕانەکان
Linear Models and Rates of change

ئامانجەکان

- بە زانینی دوو خاڵ لەسەر ڕاستەهێڵێك لارییەکەی دەدۆزێتەوە.
- هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك دەدۆزێتەوە بە زانینی لاری و خاڵێکی سەر ڕاستەهێڵەکە.
- لاری، وەك ڕێژە یان وەك تێکرای گۆڕان، لە پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانە لێکدەداتەوە.
- وێنەی ڕاستەهێڵێك دەکێشێت هاوکێشەکەی بە شێوەی لاری–یەکتربڕین نووسرابێت.
- هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك دەنووسێت تەریب بێت بە ڕاستەهێڵێکی دیاریکراو یان ئەستوون بێت لەگەڵی.

زاراوەکان
Vocabulary

لاری Slope

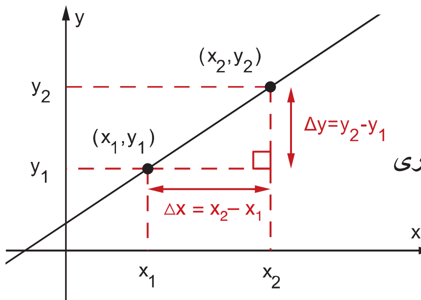
شێوەی لاری – خاڵ
Slope - point form

شێوەی لاری – یەکتربڕین
Slope - Intercept form

شێوەی گشتی General form

تێکرای ناوەندی گۆڕان
Average rate of change

لاری ڕاستەهێڵ



کاتێك خاڵێك لەسەر ڕاستەهێڵێکی نائەستوون دەجووڵێت، بە مەودای ئاسۆیی یەك یەکە لە چەپەوە بۆ ڕاست، خاڵەکە بەسەر دەکەوێت یان دێتە خوارەوە بەپێی باری ڕاستەهێڵەکە. لاری ڕاستەهێڵەکە بریتییە لە ژمارەی ئەو یەکانەی کە خاڵەکە بەسەری دەکەوێت « یان دایدەبەزێنێت» لە ئەنجامی ئەم جووڵانەوەیەدا.

خاڵەکانی (x_1 , y_1) و (x_2 , y_2) سەر ڕاستەهێڵەکە بەکاربهێنە.

هەرچەندە خاڵەکە لەسەر ڕاستەهێڵەکە لە چەپەوە بۆلای ڕاست بجووڵێت بەمەودای ئاسۆیی $\Delta x = x_2 - x_1$ یەکە، خاڵەکە بە مەودای ستوونی $\Delta y = y_2 - y_1$ یەکە دەجووڵێت، ($\triangle$ بە دەلتا Delta بخوێنەوە، کە پیتێکی یۆنانیە، هەردوو نووسینی $\triangle x$ و $\triangle y$ لە دوو پیت پێکهاتوون بەڵام هەردووکیان یەك هێمان).

پێناسەی لاری ڕاستەهێڵ

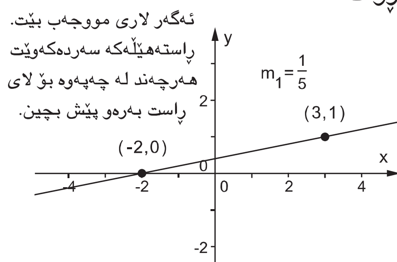
لاری ڕاستەهێڵێکی نائەستوون کە بە دووخاڵی (x_1 , y_1) ، (x_2 , y_2) دادەڕوات

بریتییە لە $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ کە $x_2 \neq x_1$

لاری ڕاستەهێڵی ئەستوون پێناسە نەکراوە.

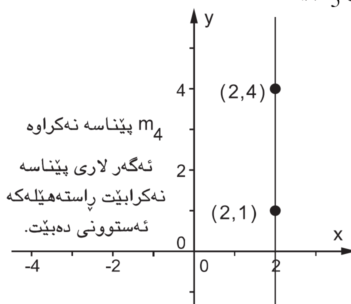
سەرنجبدە ئەو ڕاستەهێڵەی بە دوو خاڵی (x_1 , y_1) ، (x_2 , y_2) دادەڕوات

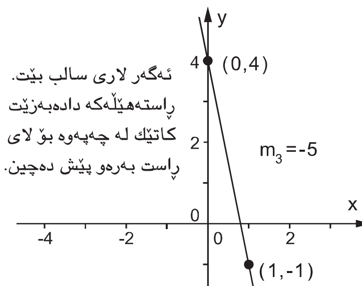
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{-(x_2 - x_1)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

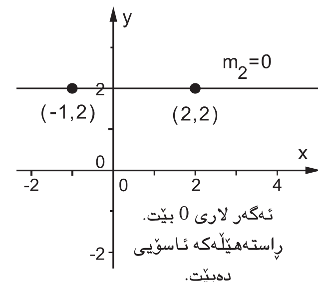


هەربۆیە هەڵبژاردنی خاڵی یەکەم و خاڵی دووەم کار لە ئەنجامەکەی ناکات.

لە شێوەکانی خوارەوە 4 ڕاستەهێڵ دەردەکەوێت. یەکەمیان لارییەکەی مووجەبە، و دووەمیان لارییەکەی دەکاتە 0 و سێیەمیان لارییەکەی سالبە، و ئەوی تریان لارییەکەی پێناسە نەکراوە، بە شێوەیەکی گشتی، هەرچەندە بەهای ڕووتی لارییەکە زیادبکات بەرزبوونەوەکەی زیاد دەکات. بەرزبوونەوەی ئەو ڕاستەهێڵەی کە لارییەکەی 5– بێت لە شێوەی خوارەوە گەورەترە لە بەرزبوونەوەی ئەو ڕاستەهێڵەی کە لارییەکەی $\frac{1}{5}$ بێت.

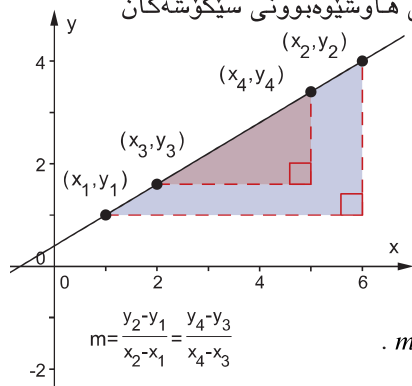






هاوکێشەی ڕاستەهێڵ

دەتوانرێت هەردوو خاڵ لە خاڵەکانی ڕاستەهێڵێکی نائەستوون بۆ دۆزینەوەی لاری ڕاستەهێڵەکە بەکاربهێنرێت. دەتوانیت پاسەدانی ئەم کارە بکەیت بە بەکارهێنانی هاوشێوەبوونی سێگۆشەکان هەروەك لە شێوەی بەرامبەر ڕوونکراوەتەوە.



$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}$$

دەتوانیت هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بنووسیت ئەگەر لاری و پۆوتانی خاڵێکی سەر ڕاستەهێڵەکە بزانیت. وا دابنێ لاری ڕاستەهێڵەکە دەکاتە m ، و بە خاڵی (x_1, y_1) دادەڕوات.

ئەگەر (x, y) خاڵێکی جووڵاو بێت لەسەر ڕاستەهێڵەکە، ئەوا $m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$.

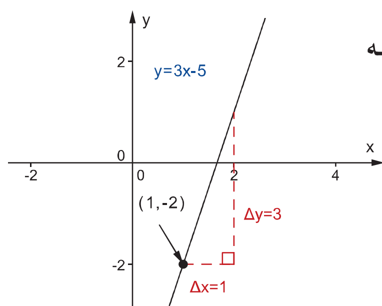
دەتوانیت ئەو هاوکێشەیە بە شێوەی $y-y_1=m(x-x_1)$ بنووسیت، نووسینی هاوکێشەی ڕاستەهێڵەکە بەم شێوەیە پێی دەوترێت **شێوەی لاری – خاڵ**.

هاوکێشە بەشێوەی لاری – خاڵ
شێوەی هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی کە لارییەکەی m و بەخاڵی $(x_1 ، y_1)$ دادەڕوات بریتییەلە: $y-y_1=m(x-x_1)$

نموونـــە 1

دۆزینەوەی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ

هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزەوەکە لارییەکەی 3 ـە و بە خاڵی $(1, -2)$ دادەڕوات.



شیکار

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-(-2)=3(x-1)$$
$$y+2=3(x-1)$$
$$y=3x-5$$

لەبیرت بێت تەنها ڕاستەهێڵە نائەستوونەکان لارییان هەیە. لەمەشەوە، ناتوانرێت هاوکێشەی ڕاستەهێڵی ئەستوون بە شێوەی لاری – خاڵ بنووسرێت. هاوکێشەی ڕاستەهێڵی ئەستوون بە شێوەی $x=k$ دەنووسرێت کە k ژمارەیەکی ڕاستییە، بۆ نموونە هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە ئەستوونەی کە بە خاڵی $(1, -2)$ دادەڕوات، بریتییە لە $x=1$.



1. هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بدۆزەوە لارییەکەی -2 بێت و بەخاڵی $(1, 1)$ دادەڕوات.

ڕێژە و تێکرای گۆڕانەکان

دەتوانرێت لاری ڕاستەهێڵ وەك ڕێژە یان تێکرا لێکبدرێتەوە. ئەگەر x و y بەهەمان یەکەی پێوانە پێورابێت، هەر بۆیە لاری یەکەی پێوانەی نابێت. ئەوەشیان دەبێتە ڕێژە، بەڵام ئەگەر x و y بەدوو یەکەی پێوانەی جیاواز پێورا بن ئەوا لاری دەکاتە تێکرای گۆڕان. لەم پۆلەدا بارەکانی لاری دەبێتە ڕێژە ، باری تر دەبێتە تێکرای گۆڕان دەخوێنیت.

نموونـــــه 2 لێکدانەوەکانی جیاواز بۆ لاری

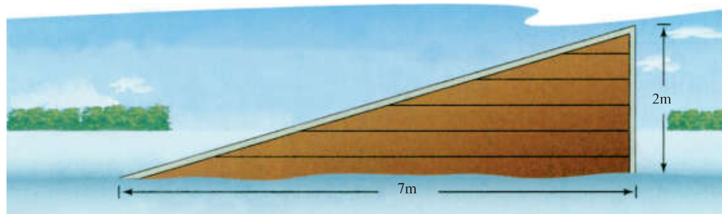
أ ساڵی 1990 ژمارەی دانشتوانی شارێك 3687000 کەس بوو، و لە ساڵی 2000 ، 4042000 کەس بوو. تێکرای ناوەندی گۆڕانی ژمارەی دانیشتوانی چەندبووە.

$$\text{تێکرای گۆڕان} = \frac{\text{گۆڕان لە ژمارەی دانیشتوان}}{\text{گۆڕان لە ژمارەی ساڵ}}$$

$$= \frac{4042000-3687000}{2000-1990} = 35\ 500$$

کەواتە تێکرای ناوەندی گۆڕانی ژمارەی دانیشتوانی لە ساڵێکدا 500 35 کەسە. ئەگەر ژمارەی دانیشتوانی ئەو شارە بە هەمان ڕێژە زیاد بکات. ژمارەی دانیشتوانی لە ساڵی 2010 دەبێتە 000 397 4 کەس. سەرنج بدە لاری لێرەدا تێکرای گۆڕانە.

ب لە گۆڕەپانی هەڵخلیسکانی سەر ئاو، یانەیەك سەکۆی بۆ خۆهەڵدانی یاریزانەکان دانا. کە بەرزییەکەی دوو مەتر و درێژییەکەی 7 مەتر بوو هەروەك لە وێنەی خوارەوە دەردەکەوێت، لاری سەکۆیەکە بدۆزەوە.



لاری سەکۆیەکە بریتییە لە ڕێژەی بەرزییەکەی بۆ درێژییەکەی $m = \frac{2m}{7m} = \frac{2}{7}$.

تێبینی بکە لاری لێرەدا بریتییە لە ڕێژە، یەکەی پێوانەیی نییە.

ئەو تێکرا گۆڕانەی کە لەبەشی (أ)ی نموونە 2 دۆزیتەوە بریتییە لە تێکرای ناوەندی گۆڕان. تێکرای ناوەندی گۆڕان هەردەم بە مەودای ماوەکە هەژماردەکرێت. لە نموونەی 2 ئەو ماوەیە دەکاتە $[1990, 2000]$، لەبەشی سێیەم جۆرێکی تر لە تێکرای گۆڕانەکان فێردەبیت ئەویش تێکرای ساتی گۆڕانەکانە.



2. پیاوێك سەیری فڕۆکەیەك لە ئاسماندا دەکات، کە $600\ m$ ئاسۆیی لێیەوە دوورە، بە بەرزە گۆشەی 60^{o} ، لاری ڕاستەهێڵی نێوان چاوی پیاوەکە و فڕۆکەکە چەندە؟ ئایا ئەو لارییە ڕێژەیە یان تێکرای گۆڕانە؟ بەرزی فڕۆکەکە چەندە؟

نواندنی نموونە هێڵییەکان بە ڕوونکردنەوەیی

دەکرێت زۆربەی پرسیارەکانی ئەندازەی شیکردنەوە بۆ دوو جۆر پۆلین بکرێت: یەکەمیان بۆ دۆزینەوەی هاوکێشەی هێڵی (چەماوە بێت یان نا) ڕوونکردنەوەی دراوەکە. و دووەمیان بۆ کێشانی ڕوونکردنەوەی هاوکێشە دراوەکە. دەتوانیت شێوەی لاری – خاڵ بۆ هاوکێشەی ڕاستەهێڵەکە بەکاربهێنیت بۆ شیکاری پرسیارەکانی جۆری یەکەم. بەڵام ئەم شێوەیە بۆ جۆری دووەم ناگونجێت. شێوەیەکی تری هاوکێشەی ڕاستەهێڵ هەیە لەگەڵ شیکاری پرسیارەکانی جۆری دووەم دەگونجێت، کە شێوەی لاری – یەکتربڕینە.

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری – یەکتربڕین

ڕوونکردنەوەی نەخشەی هێڵی

$$y = mx + b$$

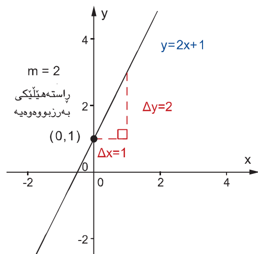
ڕاستەهێڵێکە لارییەکەی m و یەکتربڕینە ستوونییەکەی بریتییە لە $(0, b)$.

نموونـــه 3 کێشانی ڕاستەهێڵەکان

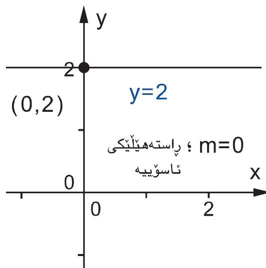
ڕوونکردنەوەی هەر هاوکێشەیەك بکێشە.

أ $y=2x+1$ ب $y=2$ ج $3y+x-6=0$

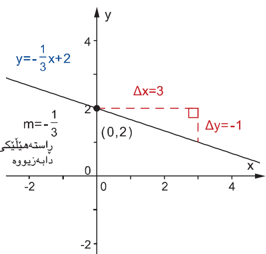
شیکار



أ یەکتربڕینی ستوونی دەکاتە$(0, 1)$ چونکە $b=1$. لاری ڕاستەهێڵەکە دەکاتە 2 . ئەوەش مانای ئەوەیە ئەگەر یەك یەکە ئاسۆیی بەرەو پێش بچیت لە چەپەوە بۆ ڕاست بە دەستپێکردن لە خاڵی $(0, 1)$ پێویستە دوو یەکە بەرزبیتەوە، ئەمەش مانای وایە خاڵی $(1, 3)$ دەکەوێتە سەر ڕاستەهێڵەکە. هەردوو خاڵی$(0, 1)$ و $(1, 3)$ دیاریبکە و ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە کە بەو دوو خاڵەدا دەڕوات.



ب یەکتربڕینی ستوونی دەکاتە $(0, 2)$ چونکە $b=2$. لاری ڕاستەهێڵەکە بریتییە لە 0. ئەوەش ئەوە دەگەیەنێت کە ڕاستەهێڵەکە ئاسۆییە. تەنها ڕاستەهێڵەکی تەریب بە تەوەری x بکێشە کە بە خاڵی $(0, 2)$ دادەڕوات.



ج هاوکێشەکە بە شێوەی لاری – یەکتربڕین بنووسە.

$$3y+x-6=0$$
$$3y=-x+6$$
$$y=-\frac{1}{3}x+2$$

یەکتربڕینی ستوونی بریتییە لە$(0, 2)$ چونکە $b=2$، لاری ڕاستەهێڵەکە بریتییە لە $-\frac{1}{3}$. ئەوەش ئەوە دەگەیەنێت ئەگەر 3 یەکە لە خاڵی $(0, 2)$ لە چەپەوە بۆلای ڕاست بەرەو پێش بچیت، پێویستە یەك یەکە دابەزێت: ئەمەش مانای وایە خاڵی $(3, 1)$ دەکەوێتە سەر ڕاستەهێڵەکە. هەردوو خاڵی$(0, 2)$ و $(3, 1)$ دیاریبکە و ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە کە بەو دوو خاڵەدا دەڕوات.



3. وێنەی ڕوونکردنەوەی هەر هاوکێشەیەك بکێشە.

أ $y=3x-1$ ب $y=-2$ ج $y+3x-2=0$

لەبەرئەوەی لاری ڕاستەهێڵی ئەستوون پێناسە نەکراوە، بۆیە ناتوانرێت هاوکێشەکەی بە شێوەی لاری – خاڵ و شێوەی لاری – یەکتربڕین بنووسرێت. شێوەی گشتی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ کە بۆ هەموو بارەکان دەگونجێت. بەم شێوەیە:

$$Ax+By+C=0$$

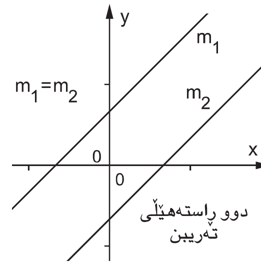
نابێت هەردوو ژمارەی A و B لەهەمان کاتدا بکاتە 0 واتا کە $|A|+|B|\neq 0$. کاتێك $x=k$ هاوکێشەی ڕاستەهێڵێکی ستوونییە، دەتوانیت بەشێوەی گشتی$(1)x+(0)y+(-k)=0$ بینووسیت.

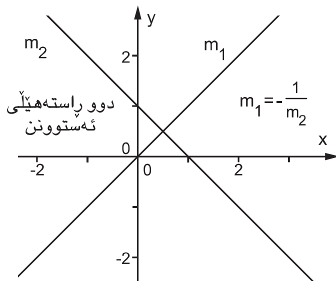
شێوە جیاوازەکانی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ

1. شێوەی گشتی $Ax+By+C=0$ کاتێك $|A|+|B|\neq 0$.
2. شێوەی هاوکێشەی ڕاستەهێڵی ستوونی $x=k$
3. شێوەی هاوکێشەی ڕاستەهێڵی ئاسۆیی $y=k$
4. شێوەی لاری – خاڵ $y-y_1=m(x-x_1)$
5. شێوەی لاری – یەکتربڕین $y=mx+b$

تەریببوون و ئەستوونبوونی ڕاستەهێڵەکان

لاری ڕاستەهێڵ ڕۆڵێکی گرنگی هەیە لە دیاریکردنی تەریببوون یان ئەستوونبوونی ڕاستەهێڵەکان بێئەوەی پێویستت بە کێشانی وێنەکانیان بێت. ئەگەر لاری دوو ڕاستەهێڵی نائەستوون یەکسان بن ئەوا تەریب دەبن و ئەگەر ئەنجامی لێکدانی لارییەکانیان بکاتە 1− ، ئەوا ئەستوون دەبن.





لەبیرت بێت

لەبیرت بێت

ڕاستەهێڵی ئەستوونی ئەو ڕاستەهێڵەیە کە تەریب بەتەوەری y دەبێت

ڕاستەهێڵی ئاسۆیی ئەوەیە کە بە تەوەری x تەریب دەبێت.

تەریببوون و ئەستوونبوونی ڕاستەهێڵەکان

1. دوو ڕاستەهێڵ تەریب دەبن، ئەگەر تەنها ئەگەر لارییەکانیان یەکسان بن.
2. دوو ڕاستەهێڵ ئەستوون دەبن، ئەگەر و تەنها ئەگەر ئەنجامی لێکدانی لارییەکانیان بکاتە 1−

نموونە 4

دۆزینەوەی ڕاستەهێڵە تەریبەکان و ئەستوونەکان

أ بەشێوەی گشتی، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە، کە بە خاڵی $(2,-1)$ دادەڕوات و تەریبە بە ڕاستەهێڵی $2x-3y=5$.

ب بە شێوەی گشتی، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە کە بەخاڵی $(2,-1)$ دادەڕوات و ئەستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $2x-3y=5$.

شیکار

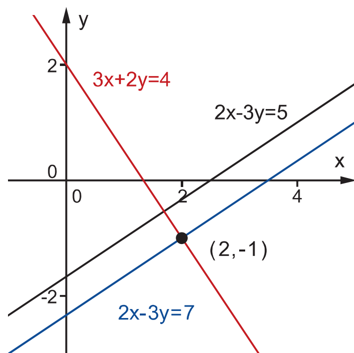
لاری ڕاستەهێڵی $2x-3y=5$ بدۆزەوە ،هاوکێشەکە بە شێوەی لاری – یەکتربڕین بنووسە

$$y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$$

لاری ڕاستەهێڵەکە بریتییە لە $\frac{2}{3}$.

أ لاری ئەو ڕاستەهێڵەی بە خاڵی $(2, -1)$ دادەڕوات و تەریبە بە ڕاستەهێڵی $2x - 3y = 5$ بریتییە لە $\frac{2}{3}$.
هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزەوە کە لارییەکەی $\frac{2}{3}$ و بەخاڵی $(2, -1)$ دادەڕوات.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-1) = \frac{2}{3}\left(x - (2)\right)$$
$$3(y + 1) = 2(x - 2)$$
$$2x - 3y - 7 = 0$$



ب لاری ئەو ڕاستەهێڵەی کە بە خاڵی $(2, -1)$ دادەڕوات و ئەستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $2x - 3y = 5$ بریتییە لە $m = -\frac{3}{2}$
هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزەوە کە لارییەکەی $-\frac{3}{2}$ و بەخاڵی $(2, -1)$ دادەڕوات.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-1) = -\frac{3}{2}\left(x - (2)\right)$$
$$2(y + 1) = -3(x - 2)$$
$$3x + 2y - 4 = 0$$



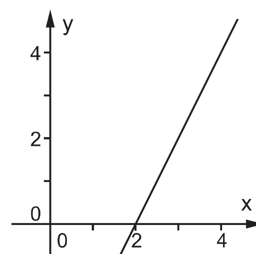
4. أ بە شێوەی گشتی، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزەوە کە بە خاڵی $(1, -3)$ دادەڕوات و تەریبە بە ڕاستەهێڵی $x + 5y = -1$.

ب بە شێوەی گشتی، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزەوە کە بە خاڵی $(2, -1)$ دادەڕوات و ئەستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $x + 5y = -1$.

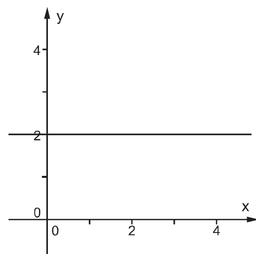
2–1 ڕاهێنان

لە پرسیاری **1** تا **4** ، لاری ڕاستەهێڵەکە بخەملێنە.

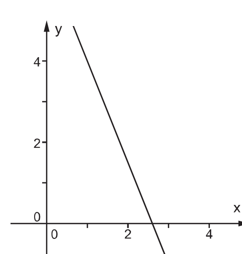
1



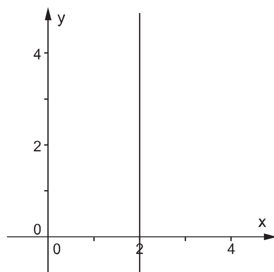
2



3



4



لە پرسیاری **5** تا **10** ، ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە کە لارییەکەی دراوە و بە خاڵە دراوەکە دا دەڕوات.

5 $(2, 3)$؛ 1

6 $(-4, 1)$؛ -3

7 $(2, 3)$؛ -2

8 $(-4, 1)$؛ 0

9 $(2, 3)$ ؛ $-\frac{3}{2}$

10 $(-4, 1)$؛ پێناسەنەکراوە

لە پرسیاری **11** تا **14** ، لاری ڕاستەهێڵەکە بدۆزەوە کە بە دوو خاڵە دیاریکراوەکەدا دەڕوات.

11 $(5, 2)$ و $(3, -4)$

12 $(4, -2)$ و $(3, -2)$

13 $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{6}\right)$ و $\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

14 $(2, 5)$ و $(2, 1)$

لە پرسیاری **15** تا **18** ، سێ خاڵی تر لەسەر ئەو ڕاستەهێڵە دیاریبکە کە لارییەکەی و خاڵێکی سەر ڕاستەهێڵەکە دراوە.

15 $(2, 1)$ ؛ $m = 0$

16 $(1, 7)$ ؛ $m = -3$

17 $(-3, 4)$ ؛ پێناسەنەکراوە m

18 $(-2, -2)$ ؛ $m = 2$

لە پرسیاری **19** تا **22** ، لاری ڕاستەهێڵەکە و خاڵی یەکتربڕینە ستوونییەکەی بدۆزەوە.

19 $x + 5y = 20$

20 $6x - 5y = 15$

21 $x = 4$

22 $y = -1$

لە پرسیاری **23** تا **28** هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزەوە کە لارییەکەی و خاڵێکی سەر ڕاستەهێڵەکە دراوە، لە پاشاندا وێنەکەی بکێشە.

23 $(0, 3)$ ؛ $m = \frac{3}{4}$

24 $(3, -2)$؛ $m = 3$

25 $(0, 4)$؛ $m = 0$

26 $(-2, 4)$؛ $m = -\frac{3}{5}$

27 $(0, 0)$؛ $m = \frac{2}{3}$

28 $(-1, 2)$ ؛ پێناسەنەکراوە

لە پرسیاری **29** تا **34** ، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە کە بە هەردوو خاڵەکە دیاریکراون.

29 $(2, 1)$ و $(0, 3)$

30 $(-3, -4)$ و $(1, 4)$

31 $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ و $\left(0, \frac{3}{4}\right)$

32 $\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right)$ و $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

33 $(5, 1)$ و $(5, 8)$

34 $(1, -2)$ و $(3, -2)$

35 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە ستوونییە بدۆزەوە کە یەکتربڕینی ئاسۆیی لە 3 دا هەیە.

36 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە ئاسۆییە بدۆزەوە کە یەکتربڕینی ستوونی لە 3 دا هەیە.

37 ڕوونیبکەوە کە هاوکێشەی $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ، کاتێك $a\neq 0$ و $b\neq 0$ دەکاتە هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی کە دوو خاڵی یەکتربڕینی $(a, 0)$ و $(0, b)$ هەیە.

لە پرسیاری **38** و **39** دا، ئەنجامی ڕاهێنانی پێشوو بەکاربهێنە تا هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزیتەوە کە دوو یەکتربڕینە دیاریکراوەکەی هەیە.

38 $(2, 0)$ و $(0, 3)$

39 $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ و $(0, -2)$

لە پرسیاری **40** تا **43** ، هاوکێشەیەك بنووسە بۆ ئەو ڕاستەهێڵەی بە خاڵە دراوەکە دا دەڕوات و تەریبە بە ڕاستەهێڵە دراوەکە بنووسە.

40 $(2, 1)$ ؛ $4x-2y=3$

41 $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$ ؛ $5x-3y=0$

42 $(-6, 4)$ ؛ $3x+4y=7$

43 $(-1, 0)$ ؛ $y=-3$

لە پرسیاری **44** تا **47** ، هاوکێشەیەك بنووسە بۆ ئەو ڕاستەهێڵەی بە خاڵە دراوەکە دا دەڕوات و ئەستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵە دراوەکە بنووسە.

44 $(2, 1)$ ؛ $4x-2y=3$

45 $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$ ؛ $5x-3y=0$

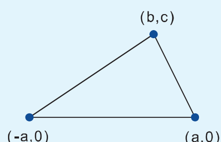
46 $(-6, 4)$ ؛ $3x+4y=7$

47 $(-1, 0)$ ؛ $y=-3$

48 ئایا خاڵەکانی $(-2, 1)$ و $(0, -1)$ و $(2, -2)$ دەکەونە سەر یەك ڕاستەهێڵ؟

دەربارەی چەمکەکان

لە ڕاهێنانی 49 تا 51 ، پۆوتانی خاڵە یەکتربڕینە دیاریکراوەکە بدۆزەوە. ڕوونیبکەوە چۆن شیکارەکەت ئەنجامدا.



49 خاڵی یەکتربڕینی تەوەرەکانی لایەکانی سێگۆشەکە.

50 خاڵی یەکتربڕینی ناوەندەکانی سێگۆشەکە.

51 خاڵی یەکتربڕینی بەرزییەکانی سێگۆشەکە.

52 **گۆڕینی پلەکانی گەرما** ئاو لە پلەی گەرمی 100° دەکوڵێت بە پێوەری سەدی (212° بە پێوەری فهرنهایت)، و لە پلەی گەرمی 0° دەیبەستێت (32° بە پێوەری فهرنهایت). هاوکێشەیەکی هێڵی بنووسە بۆ گۆڕینی پێوەری سەدی بۆ پێوەری فهرنهایت، و هاوکێشەیەکی تر بۆ گۆڕین بە پێچەوانەی ئەو ئاڕاستەیە. 72^{F} بە پێوەری فهرنهایت بۆ پلەی گەرمی بەپێوەری سەدی بگۆڕە.

53 کۆمپانیایەك ڕۆژانە 15 000 دینار دەداتە شوفێری بارهەڵگرێك لە بڕی خواردن و پشوودان، و 350 دینار لە بڕی هەر کیلۆمەترێك کە دەیبڕێت. نەخشەیەك بنووسە نموونەیەك پێك بهێنێت بۆ هەژمارکردنی بڕی ئەو پارەییەی کۆمپانیاکە بە شوفێرەکەی دەدات بەپێی ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی کە دەیبڕێت. شوفێرەکە $137km$ بڕی. کۆمپانیاکە چەند پارەی پێ دەدات؟

54 **بەکاربردنی هێڵی** کاتێك ئۆتۆمبیلێك دەکڕیت نرخەکەی ساڵ دوای ساڵ دادەبەزێت. واتە ئۆتۆمبیلەکە ساڵ لە دوای ساڵ بەکاردەبرێت. هەندێك لە شارەزایانی بەڕێوەبردن پشت بە ڕێسایەك دەبەستن بۆ هەژمارکردنی بەکاربراوەکان. بەپێی ئەم ڕێسایە وا دەردەکەوێت کە نرخی بەکاربراو لە ساڵێکەوە بۆ ساڵێکی تر نەگۆڕە. یەك لە کۆمپانیایەکان ئامێرێکی کڕی. نرخەکەی 875 000 دیناربوو. ئەم ئامێرە پاش 5 ساڵ بۆ بەکارهێنانان ناشێت و هیچ نرخێك ناکات.

أ نەخشەیەکی هێڵی بنووسە نموونەیەك پێکبهێنیت بۆ هەژمارکردنی نرخی ئامێرەکە بە پێی کات t $(0 \le t \le 5)$.

ب نرخی ئەم ئامێرە چەندە کاتێك $t = 2$.

ج پاش چەند کات نرخی ئامێرەکە دەبێتە 175 000 دینار؟

دووری خاڵی (x_1, y_1) لە ڕاستەهێڵی $Ax + By + C = 0$ بەپیاسای $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ دەپێوریت، لە پرسیاری 55 تا 58 ، دووری خاڵەکە لە ڕاستەهێڵەکە بدۆزەوە.

55 $4x + 3y = 10$ ؛ $(0, 0)$

56 $x - y - 2 = 0$ ؛ $(-2, 1)$

57 $x = -1$ ؛ $(6, 2)$

58 $4x + 3y = 10$ ؛ $(2, 3)$

59 بەپێی m ، دووری d لە نێوان خاڵی $(3, 1)$ و ڕاستەهێڵی $y = mx + 4$ بدۆزەوە، کەی ئەم دوورییە دەکاتە 0 ؟ وەڵامەکە بە ئەندازەیی ڕوونبکەوە؟

60 بیسەلمێنە کە شێوەی ئەندازەیی لەئەنجامی بەیەك گەیاندنی ناوەڕاستی یەك لەدوای یەکی لایەکانی چوارلایەك پەیدادەبێت بریتییە لە لاتەریب.

61 بیسەلمێنە تیرەکانی مەعین لەسەر یەکتر ئەستوونن

ڕاست یان هەڵە؟ لە پرسیاری 62 و 63 دا، دیاریکە، ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە یان ئەگەر هەڵەیە بە دژە نموونەیەك بیسەلمێنە.

62 دوو ڕاستەهێڵی $ax + by = c_1$ و $bx - ay = c_2$ ، لەگەڵ یەك ئەستوونن، کاتێك $a \ne 0$ و $b \ne 0$.

63 دەکرێت دوو ڕاستەهێڵ لارییەکانیان موجەب بێت ئەستوون بن.

بـەشـــی 1

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

1–1 ڕوونکردنەوەی نەخشەکان

1 بە خاڵەکان ڕوونکردنەوەی هەر نەخشەیەك بكێشە.

أ $f(x)=2x^2-4x$

ب $f(x)=2\sqrt{x+1}-1$

2 خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی هەرنەخشەیەك لەگەڵ دوو تەوەری پۆوتانەکان بدۆزەوە، لە پاشاندا لە هاوجێبوونی لەگەڵ تەوەری y و لەگەڵ خاڵی بنەڕەت بکۆڵەوە.

أ $f(x)=\frac{x}{|x|+1}$

ب $f(x)=(3x-1)^2+6x$

3 $f(x)=x^3+3x$ و $g(x)=x^2+3$.

أ دیاریبکە نەخشەی f تاکە و نەخشەی g جووتە.

ب خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی دوو نەخشەکە بدۆزەوە.

2–1 هاوکێشەی ڕاستەهێڵ

4 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەبدۆزەوە کە لارییەکەی دەکاتە -2 و بە خاڵی $(2,-1)$ دا دەڕوات.

5 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزەوە کە بە دوو خاڵی $(0,1)$ و $\left(\frac{1}{5},0\right)$ دا دەڕوات.

6 خاڵی یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵی پرسیارەکانی 4 و 5 بدۆزەوە.

7 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزەوە کە بە دوو خاڵی $(2,0)$ و $(0,b)$ دا دەڕوات. بەهای b چەندە کە وا دەکات ڕاستەهێڵەکە ئەستوونبێت لەگەڵ ڕاستەهێڵی $x-2y+1=0$.

8 بەهای a چەندە کە وادەکات خاڵەکانی $(2,0)$ و$(0,-3)$ و$(a\,,1)$ بکەونە سەریەك ڕاستەهێڵ؟

3-1
نەخشەکان و ڕوونکردنەوەکانیان
Functions and Their Graphs

ئامانجەکان

- نووسینی نەخشەیی بۆ نواندنی نەخشە و هەژمارکردنی بەهایەکانی بەکاردەهێنێت.
- بوارو مەودای نەخشە دیاریدەکات.
- ڕوونکردنەوەی نەخشە دەکێشێت.
- جۆرە جیاوازەکانی جێگۆڕکێی نەخشەکان جیادەکاتەوە.
- نەخشەکان پۆلێندەکات و پێکهاتەکەی جیادەکاتەوە.

نەخشەکان و نووسینی نەخشەیی

دەتوانیت **پەیوەندی** لە کۆمەڵەی A بۆ کۆمەڵەی B بە جووتە ڕێکخراوەکانی(x, y) دەرببڕین کاتێك $x\in A$ و $y\in B$ دەتوانین بڵێین پەیوەندییەکە y بە x **دەبەستێتەوە**. ($\in$ دەخوێندرێتەوە دانەیە لە). نەخشە بریتییە لە پەیوەندییەك لە کۆمەڵەی A بۆ کۆمەڵەی B ، سیفەتی بنەڕەتی تایبەتی هەیە کە دوو دانەی y ، z لە B دا یەکسان دەبن ئەگەر بەهۆی نەخشەکە بەهەمان دانەی x لە A بەسترابنەوە. بە واتایەکی تر ئەگەر (x, y) و (x, z) جووتە ڕێکخراوێك بێت لە کۆمەڵەی ئەو جووتە ڕێکخراوانەی نەخشەکە پێکدەهێنن، ئەوا دەبێت $y = z$. لەم پەیوەندییە بە x دەوترێت **گۆڕاوی ئازاد** و بە y دەوترێت **گۆڕاوی پەیوەست**.

دەتوانین زۆر لە بارەکانی ژیانی ڕۆژانە بە نەخشەکان بنوێنین. ڕووبەری بازنەی A نەخشەیە بەپێی نیوەتیرە r لە پەیوەندی $A= \pi r^2$. لەم پەیوەندییەدا r گۆڕاوی ئازادە و A گۆڕاوی پەیوەستە

پێناسەی نەخشەی ڕاستی بە گۆڕاوی ڕاستی

ئەگەر A و B دوو کۆمەڵە بن لە ژمارە ڕاستییەکان، ئەوا هەر نەخشەیەکی f لە A بۆ B بریتییە لە **نەخشەیەکی ڕاستی بە گۆڕاوێکی ڕاستی**.

بواری f دەکاتە کۆمەڵەی A . ئەگەر نەخشەی f دانەی y لە B بە دانەی x لە A ببەستێتەوە، ئەوا دەکاتە بەهای f لە x ، لەوکاتەدا دەنووسرێت $y = f(x)$ و دەڵێین y بریتییە لە وێنەی x بە نەخشەی y، مەودای نەخشەی f بریتییە لە کۆمەڵەی دانەکانی B کە نەخشەکە بە هەموو دانەکانی بواری A دەبەستێتەوە.

لە پۆلی یازدەم فێربوویت کە دەتوانرێت پێناسەی نەخشە بەڕێگای جیاواز بکرێت. بەڵام لە پۆلی دوازدەدا گرنگی دەدەین بە شێوەی بنەڕەتی نەخشەکان کە بەهۆی هاوکێشەی جەبری پێناسەکراون. بۆ نموونە هاوکێشەی $x^2 + 2y = 1$ دەتوانرێت گۆڕاوی پەیوەستی y وەك نەخشەیەك بەپێی گۆڕاوی ئازادی x پێناسە بکرێت. بۆ ئەمەش، هاوکێشەکەی پێشوو بەپێی y شیکار دەکەین و بەهایەکەی وەك برێك دەنووسین جگە لە x هیچ گۆڕاوی تری تێدانەبێت.

$$y = \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right)$$

لەبەرئەوەی $y = f(x)$ ئەوا دەتوانین بنووسین.

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right)$$

بە نووسینی نەخشەکە بە شێوەکەی پێشوو دەووترێت **نووسینی نەخشەیی** نەخشەکە. نووسینی نەخشەیی سوودی زۆری هەیە، ئەویش بەشێوەیەکی ڕوون گۆڕاوی ئازاد x و گۆڕاوی پەیوەست $f(x)$ دیاریدەکات و لەگەڵ ناوی نەخشەی f. هەروەها هەژمارکردنی بەهای نەخشەکە ئاسانتر دەکات کاتێك گۆڕاوی سەربەست بەهایەکی دیاریکراو وەردەگرێت. بۆ نموونە، بۆ هەژمارکردنی بەهای نەخشەی $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ کاتێك $x = -2$، بە لەجیاتیدانانی بەهایەکەی x ، و هەژماری بەهای ژمارەیی بڕەکە بکە کە لە ئەنجامی لەجیاتیدانانەکەدا دەردەچێت.

$$f(-2) = 2(-2)^2 - 4(-2) + 1 = 2(4) + 8 + 1 = 17$$

لەبیرت بێت کاتێك لەجیاتی x بەهایەکی دیاریکراوی a لە نەخشەی $f(x)$ دادەنێیت ئەوا ئەو بەهایەی $f(a)$ کە بە دەستیدەهێنێت، بریتییە لە وێنەی x بە نەخشەی f.

Vocabulary زاراوەکان

Relation	پەیوەندی
Associate	دەبەستێتەوە
Real function in one real variable	نەخشەی ڕاستی بەیەك گۆڕاوی ڕاستی
Domain	بوار
Range	مەودا
Function notation	نووسینی نەخشەیی
One-to-One function	نەخشەی جیا
Onto function	نەخشەی گشتگر
Polynomial function	نەخشەی ڕادەداری
Degree	پلە
Coefficient	هاوکۆلکە
Leading Coefficient	هاکۆلکەی سەرەکی
Constant term	ڕادەی نەگۆڕ

نموونـــه 1 دۆزینەوەی بەهای نەخشە

بە بەکارهێنانی نەخشەی $f(x)=x^2+7$ بەهای هەر برێك بدۆزەوە.

أ $f(3a)$ ب $f(b-1)$ ج $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ کاتێك $\Delta x\neq 0$

شیکار

أ $f(3a)=(3a)^2+7=9a^2+7$

ب $f(b-1)=(b-1)^2+7=b^2-2b+1+7=b^2-2b+8$

ج $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2+7-(x^2+7)}{\Delta x}$

$=\frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+7-x^2-7}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$

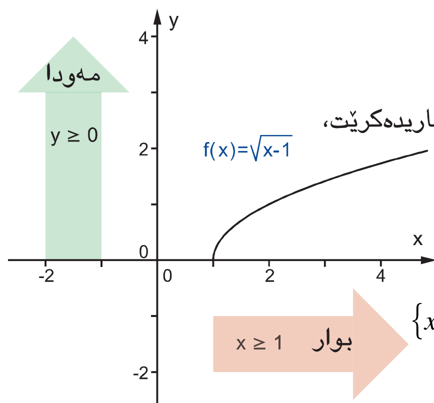
تێبینی: بە بڕی $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ دەوترێت ئەنجامی دابەشکردنی دوو جیاوازیەکە، کە ڕۆڵێکی گرنگی هەیە لە هەژمارکردنی جیاکاریدا. هەروەك لە دواتر دەیبینیت.



1. بە بەکارهێنانی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x}$ بەهای هەر برێك بدۆزەوە.

أ $f(3a)$ ب $f\left(\sqrt{3}\right)$ ج $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ کاتێك $\Delta x\neq 0$

بواری نەخشە و مەوداکەی



بوار

بواری نەخشەیەك بە ڕێگای ئاشکراو و ڕێگای نا ئاشکرا دیاریدەکرێت، بە بەکارهێنانی ئەو هاوکێشەی نەخشەکە پێناسە دەکات. بۆ نموونە:

- بواری نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ کاتێك $4\leq x\leq 5$ بەشێوەی ئاشکرا پێناسەکراوە. کە بریتییە لە $\{x/4\leq x\leq 5\}$ تێبینی ئەوە بکە ژێرە جیاوازە لە ماوەی $4\leq x\leq 5$)
- بواری نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x^2-9}$ بەشێوەی نا ئاشکرا پێناسەکراوە، کە بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان کەوا دەکات x^2-9 یەکسان نەبێت بە 0 ، واتا $x\neq\pm 3$ ئەو بوارە بریتییە لە $\{x/x\neq\pm 3\}$.

مەودا

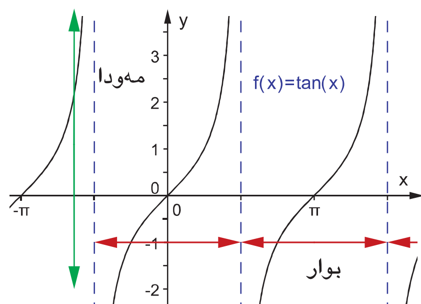
مەودا بۆ هەر نەخشەیەکی f، بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان کە بەهایەکانی نەخشەکە دەیگرێتەوە، واتا کۆمەڵەی $f(a)$ کە a لەبواری نەخشەی f دایە.

دەتوانیت مەودای نەخشەی f بەسەیرکردنی ڕوونکردنەوەکەی یان بە سەیرکردنی ئەو هاوکێشەی پێناسەی دەکات دیاریبکەیت . بۆ نموونە:

- مەودای نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x}$ بریتییە لە $\{y/y\neq 0\}$ چونکە $\frac{1}{x}$ نابێت بکاتە 0 . دەکرێت یەکسان بێت بە هەر بەهایەك جیاواز بێت لە 0 .
- مەودای نەخشەی $f(x)=\sin x$ بریتییە لە $\{y/-1\leq y\leq 1\}$ چونکە $\sin x$ ناکرێت ئەو بەهایانە وەربگرێت کە لە دەرەوەی ماوەی $[-1, 1]$ دایە.

نموونـــــه 2

دۆزینەوەی بواری نەخشە و مەوداکەی



بوار و مەودای هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

أ $f(x)=\sqrt{x-1}$

ب $f(x)=\tan x$

شیکار

أ بواری نەخشەکە بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی کە پاسەدانی $x-1\geq 0$ دەکات، کە بریتییە لە ماوەی $[1, +\infty[$ مەودای نەخشەکە بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی سالب نین واتا $[0, +\infty[$ چونکە $\sqrt{x-1}$ ناکرێت سالب بێت.

ب بواری نەخشەکە بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی کە پاسەدانی $x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$ کاتێك $n\in I$ (Integer) دەکەن. بەڵام مەوداکەی بریتییە لە کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکان.



2. بوار و مەودای هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

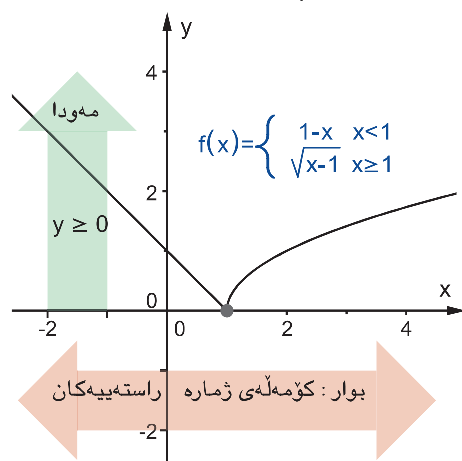
أ $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

ب $f(x)=\frac{1}{\sin x}$

نموونـــــه 3

دۆزینەوەی بوار و مەودای نەخشەی ڕێسا پەلدار

بوار و مەودای نەخشەی $f(x)=\begin{cases}1-x & x<1\\ \sqrt{x-1} & x\geq 1\end{cases}$ بدۆزەوە.



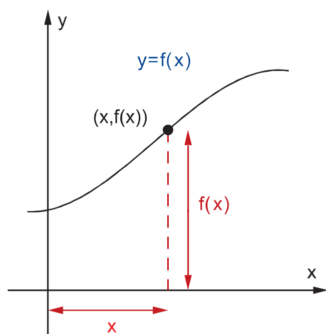
شیکار

لەبەرئەوەی نەخشەکە پێناسە کراوە کاتێك $x<1$ بەنەخشەی $f(x)=1-x$ و کاتێك $x\geqslant 1$ بە نەخشەی $f(x)=\sqrt{x-1}$، کەواتە مەوداکەی بریتییە لە کۆمەڵەی بەهاکانی $f(x)$ کاتێك $x\geq 1$ واتە $\{x : x\geqslant 0\}$ لەگەڵ کۆمەڵەی بەهاکانی $f(x)$ کاتێك $x<1$ واتە $\{x : x\geqslant 0\}$. کەواتە مەودای ئەم نەخشەیە بریتییە لە $\{x : x\geq 0\}$.



3. بوار و مەودای نەخشەی $f(x)=\begin{cases}3-x & x<3\\ \sqrt{x-3} & x\geq 3\end{cases}$ بدۆزەوە.

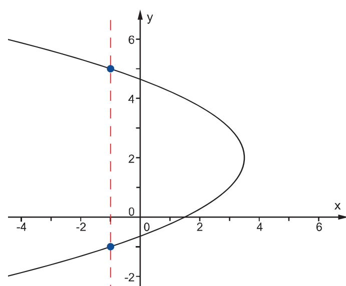
بە نەخشەی f دەوترێت نەخشەی **جیا**، ئەگەر هەر دانەیەکی y لە مەوداکەی بەتەنها دانەیەکی x لە بوارەکەی بەسترابێت، بە واتایەکی تر: دوو دانەی x_1 و x_2 لە دانەکانی بوار یەکسان دەبن ئەگەر بەهایەکانی $f(x_2)$ و $f(x_1)$ یەکسان بن، نەخشەی یەکەم لە نموونەی 2 نەخشەیەکی جیایە بەڵام نەخشەی نموونەی 1 نەخشەیەکی جیا نییە. و بە نەخشەی f لە کۆمەڵەی A بۆ کۆمەڵەی B دەوترێت نەخشەیەکی **گشتگرە**. ئەگەر مەوداکەی دانەکانی B بە تەواوی بگرێتەوە. نەخشەی دووەم لە نموونەی 2 نەخشەیەکی گشتگرە.



ڕوونکردنەوەی نەخشەکە

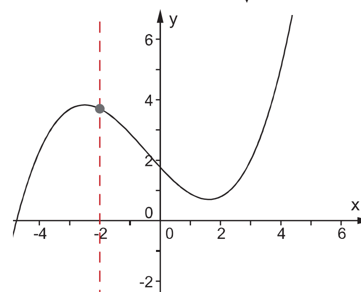
ڕوونکردنەوەی نەخشە لەهەموو خاڵەکانی $(x, f(x))$ پێکدێت کاتێك x هەموو بەهایەکانی بواری نەخشەکە وەردەگرێت. سەیری وێنەی بەرامبەر بکە، و تێبینی ئەمانەی خوارەوەبکە:

- x بریتییە لە دووری جەبری (موجەب بێت یان سالب) نێوان خاڵەکە وتەوەری y.
- $f(x)$ بریتییە لە دووری جەبری نێوان خاڵەکە و تەوەری x.

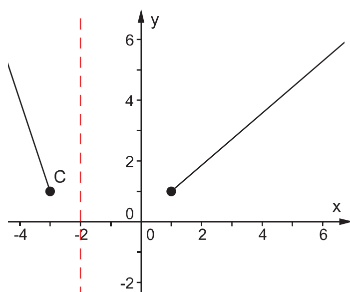


ڕوونکردنەوەکە نەخشە نانوێنێت

ئەگەر ڕاستەهێڵێکی ئەستوون بکێشیت ئەوا بەلایەنی زۆر ڕوونکردنەوەی نەخشەکە یەکجار دەبڕێت. لەم تێبینیەوە بە تاقیکردنەوەی هزری دەتوانیت بڕیار بدەی ئەگەر وێنەی ڕوونکردنەوەیی بۆ نەخشەی بنەڕەت دەگەڕێتەوە یان نا. بەم تاقیکردنەوەیە دەووترێت **تاقیکردنەوەی ڕاستەهێڵی ئەستوونی** ئەگەر ڕاستەهێڵی ئەستوونی وێنە ڕوونکردنەوەیە لە خاڵێك زیاتر ببڕێت، ئەو وێنەیە نەخشە نانوێنێت وێنە ڕوونکردنەوەیە لای چەپ نەخشە نانوێنێت. چونکە ڕاستەهێڵی ئەستوونی $x=-1$ لە دوو خاڵی جیاواز دەیبڕێت بەڵام دوو وێنەکەی تر نەخشە دەنوێنن.

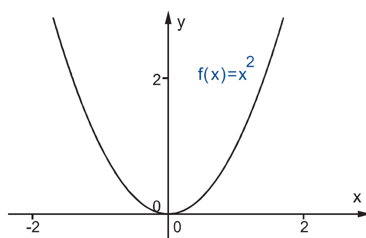


ڕوونکردنەوەکە نەخشە دەنوێنێت

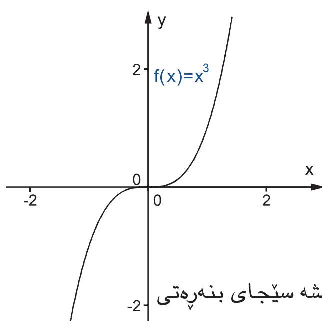


ڕوونکردنەوەکە نەخشە دەنوێنێت

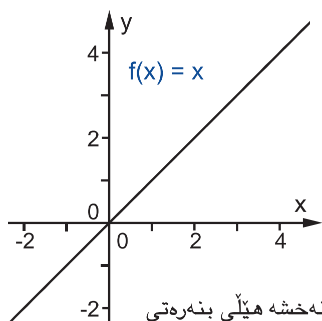
شێوەکانی خوارەوە ڕوونکردنەوەکانی 11 لە نەخشە بنەڕەتییەکان پیشاندەدات. هەوڵدە جیایانبکەیتەوە و ئەو نەخشە دیاریبکە کەهەر یەکێکیان دەنوینێت.



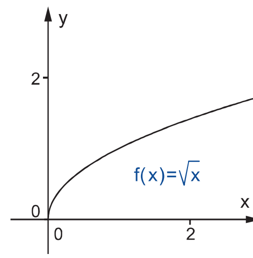
نەخشەدووجای بنەڕەتی



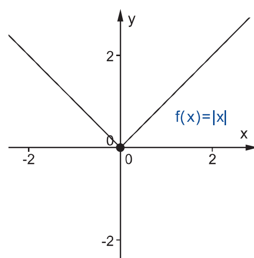
نەخشە سێجای بنەڕەتی



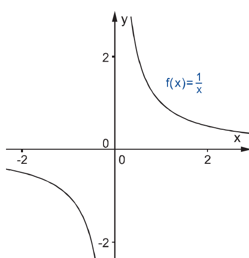
نەخشە هێڵی بنەڕەتی



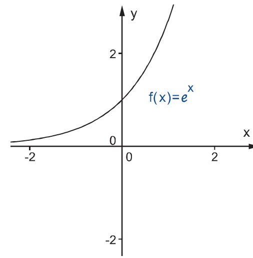
نەخشەی ڕەگی دووجای بنەڕەتی



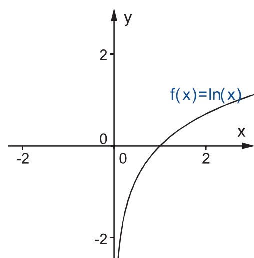
نەخشەی بەهای ڕووتی بنەڕەتی



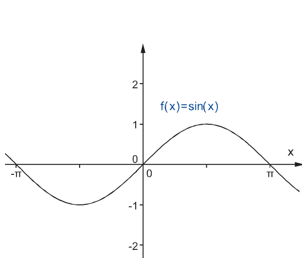
نەخشەی هەڵگەڕاوەی بنەڕەتی



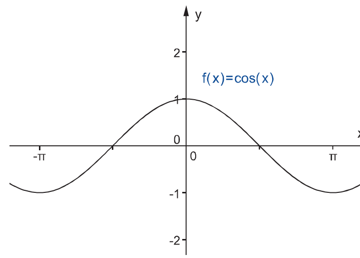
نەخشەی توانی بنەڕەتی



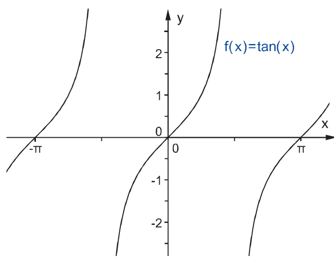
نەخشەی لۆگاریتمی بنەڕەتی



نەخشەی ساینی بنەڕەتی



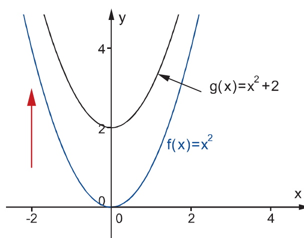
نەخشەی کۆساینی بنەڕەتی



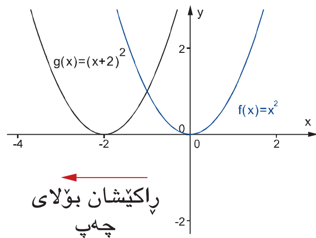
نەخشەی تانجێتی بنەڕەتی

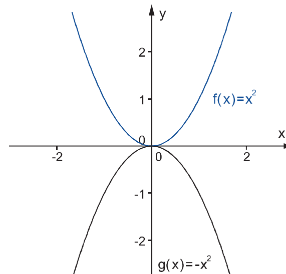
جێگۆڕکێی نەخشەکان

دەتوانرێت نەخشەکان لە کۆمەڵەکان یان خێزانەکان پۆلێنبکرێت. ڕوونکردنەوەی نەخشەکانی هەر خێزانێك بەوە جیادەکرێنەوە کە هەمان شێوەی گشتیان هەیە. ئەگەر خێزانی نەخشە دووجاییەکان وەربگریت، دەبینێت کە ڕوونکردنەوەکانیان هەمان شێوەی بنەڕەتیان هەیە، هەروەك لەم وێنانەی خوارەوە دیاردەکەون.

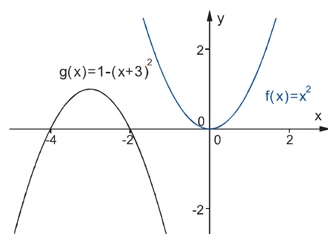


ڕاکێشان بۆلای سەرەوە





وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x



ڕاکێشان بۆلای چەپ پاشان وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x لە پاشان ڕاکێشان بۆلای سەرەوە.

هەر ڕوونکردنەوەیەك لە ڕوونکردنەوەکانی پێشوو بریتییە لە جێگۆڕکێی نەخشە بنەڕەتییەکان. چوار شێوەکەی پێشوو سێ لەو جێگۆڕکێیە بنەڕەتیانە پیشان دەدات. ڕاکێشان بۆ لای سەرەوە و ڕاکێشانی بۆلای چەپ و وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x . دەتوانیت جێگۆڕکێیەکان دیاریبکەیت کە ڕوونکردنەوەی نەخشە بنەڕەتیەکە دەکاتە ڕوونکردنەوەی نەخشەی یەکێك لە لقەکانی بەبێ کێشانی دوو ڕوونکردنەوەکە.

ئەگەر نەخشەی بنەڕەتی بکاتە نەخشەی $f(x)=x^2$ ئەوا ڕوونکردنەوەی ئەو چوار نەخشەیە بریتین لە:

$y=f(x)+2$	ڕاکێشانی بۆلای سەرەوە بە بڕی دوو یەکە
$y=f(x+2)$	ڕاکێشانی بۆلای چەپ بە بڕی دوو یەکە
$y=-f(x)$	وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x
$y=-f(x+3)+1$	ڕاکێشان بۆلای چەپ پاشان وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x پاشان ڕاکێشان بۆلای سەرەوە

جێگۆڕکێیە بنەڕەتییەکان $(c>0)$

ڕوونکردنەوەی بنەڕەتی	$y=f(x)$
ڕاکێشانی ئاسۆیی بۆلای ڕاست بە بڕی c یەکە	$y=f(x-c)$
ڕاکێشانی ئاسۆیی بۆلای چەپ بەبڕی c یەکە	$y=f(x+c)$
ڕاکێشانی ستوونی بۆلای سەرەوە بەبڕی c یەکە	$y=f(x)+c$
ڕاکێشانی ستوونی بۆلای خوارەوە بەبڕی c یەکە	$y=f(x)-c$
وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x	$y=-f(x)$
وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری y	$y=f(-x)$
وێنەدانەوە بەدەوری خاڵی بنەڕەت	$y=-f(-x)$

پۆلێنکردنی نەخشەکان

پێناسەی چەمکی نوێی نەخشە بۆ هەوڵی زاناکانی بیرکاری لەهەردوو سەدەی حەڤدەهەم و هەژدەهەم دەگەڕێتەوە. وە نووسینی نەخشەیی $y=f(x)$ بۆ زانا لیۆنارد أولر Leonhard Euler دەگەڕێتەوە. لە کۆتایی سەدەی هەژدەهەم زاناکان بەمە گەیشتن:

دەتوانرێت نموونە بیرکارییەکان بدۆزەیەوە بۆ لێکۆڵینەوەی زۆر لە پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانە بە بەکارهێنانی کۆمەڵە نەخشەیەك کە بە **نەخشە سادەکان** ناویان دەبرد بەکاربهێنرێت.



لیۆنارد أولر 1707 – 1783

سەرەرای بەشداریکردنی لەهەموو لقەکانی بیرکاری، أولر لە زانا پێشەنگەکان بوو کە هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری لەسەر پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانە لە فیزیادا جێبەجێکرد. لەزۆربەی بەرهەمەکانی بابەتەکانی وەك دروستکردنی کەشتیەکان و زانستی دەنگەکان و زانستی ڕووناکی، و فەلەك و میکانیك و کایە موگناتیسییەکانی باسکردووە.

نەخشە سادەکان پۆلێن دەکرێن بۆ سێ چەشن پێشتر لە پۆلەکانی دەیەم و یازدەهەم خوێندوتە:

- **نەخشە جەبرییەکان** (ڕادەدارەکان، ڕێژەییەکان، ڕەگییەکان).
- **نەخشە سێگۆشەییەکان** (نەخشەکانی ساین و کۆساین و تانجێنت).
- **نەخشە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان.**

لە نەخشە زۆر باوەکان **نەخشە ڕادەدارەکانە**. شێوەی گشتی نەخشەی ڕادەدار بریتییە لە:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\ ;\quad a_n\neq 0$$

کاتێك ژمارەی تەواوی موجەب n بریتییە لە پلەی نەخشەکە و ژمارە ڕاستییەکانی $a_n , a_{n-1} , ..., a_1 , a_0$ **هاوکۆلکەکانیەتی**، و هاوکۆلکەی a_n **هاوکۆلکەی سەرەکی** و هاوکۆلکەی a_0 **ڕادەی نەگۆڕە** یان **هاوکۆلکەی نەگۆڕە**. وا باوە پیتە نیشانکراوەکانی a_i بۆ نووسینی هاوکۆلکەکانی نەخشە ڕادەدارەکە بەکاربهێنرێت. کاتێك هاوکۆلکەی ئەو نەخشانەی لە پلەی نزمدان بە پیتە جیاوازەکان دەنووسرێن وەك لەم خشتەی خوارەوە دەردەکەوێت.

پلە	شێوەکەی	ناوەکەی
نەخشەییەکی ڕادەداری پلە 0	$f(x)=a$	نەخشەی نەگۆڕ
نەخشەییەکی ڕادەداری پلە 1	$f(x)=ax+b$	نەخشەی هێڵی
نەخشەییەکی ڕادەداری پلە 2	$f(x)=ax^2+bx+c$	نەخشەی دووجایی
نەخشەییەکی ڕادەداری پلە 3	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$	نەخشەی سێجایی

دەکرێت لە ڕوونکردنەوەی نەخشەی ڕادەداری کە نەگۆڕ نەبێت چەندین خاڵی جێگۆڕکێ هەبێت. کە بێسنوور سەردەکەوێت یان دادەبەزێت کاتێك x بەرەو $+\infty$ یان $-\infty$ دەجووڵێت. بە پشت بەستن بە پلەی جووتی یان تاکی نەخشەکە و نیشانەی هاوکۆلکە سەرەکی دەتوانرێت سیفەتی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە دیاریبکرێت کاتێك x بەرەو $-\infty$ یان $+\infty$ دەجووڵێت. ئەم خشتەیە پوختەی ئەم سیفەتەیە.

بۆ نەخشەکە...	پلەی تاك بێت	پلەی جووت بێت
هاوکۆلکەی سەرەکی موجەب بێت	$f(x)\to+\infty$ کاتێك $x\to+\infty$ $f(x)\to-\infty$ کاتێك $x\to-\infty$	$f(x)\to+\infty$ کاتێك $x\to+\infty$ $f(x)\to+\infty$ کاتێك $x\to-\infty$
هاوکۆلکەی سەرەکی سالب بێت	$f(x)\to-\infty$ کاتێك $x\to+\infty$ $f(x)\to+\infty$ کاتێك $x\to-\infty$	$f(x)\to-\infty$ کاتێك $x\to+\infty$ $f(x)\to-\infty$ کاتێك $x\to-\infty$

ئاوێتەکردنی نەخشەکان

لەپۆلی یازدەهەم فێربوویت چۆن دەتوانرێت نەخشە نوێیەکان بە بەکارهێنانی دوو نەخشەی f و g پێناسەبکرێت. ئەگەر $f(x)=2x-3$ و $g(x)=x^2+1$ ئەوا دەتوانیت ئەم نەخشانەی خوارەوە پێناسەبکەیت:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(2x-3)+(x^2+1)=x^2+2x-2$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(2x-3)-(x^2+1)=-x^2+2x-4$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x)=(2x-3)(x^2+1)=2x^3-3x^2+2x-3$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x-3}{x^2+1}$$

$$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=2\big(g(x)\big)-3=2(x^2+1)-3=2x^2-1$$

$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=\big(f(x)\big)^2+1=(2x-3)^2+1=4x^2-12x+10$$

سەرنج بدە $f\circ g\neq g\circ f$

نموونـــــە 4 دۆزینەوەی بواری نەخشەی ئاوێتە

أ بواری نەخشەی $g\circ f$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\sqrt{x}$.

ب بواری نەخشەی $g\circ f\circ h$ بدۆزەرەوە کاتێك $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=3x$ و $h(x)=x-2$

شیکار

أ $(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^2-1}$

بواری نەخشەی $g\circ f$ بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی x کە پاسەدانی $x^2-1\geq 0$ دەکەن.

بۆ شیکارکردنی لاسەنگەی $x^2-1\geq 0$، ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^2-1$ بکێشە .کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی x کە پاسادانی $x^2-1\geq 0$ دەکات بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی پاسادانی $x\leq -1$ یان $x\geq 1$ دەکەن.

کەواتە بواری نەخشەی $g\circ f$ بریتییە لە $\{x\leq -1$ یان $x\geq 1\}$.

ب $(f\circ g\circ h)(x) = f\big(g(h(x)\big)=f\big(g(x-2)\big)=f\big(3(h(x)\big)$

$$=\sqrt{3(x-2)}$$

بواری نەخشەی $g\circ f\circ h$ بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان.

کەواتە، دەکاتە $(x-1)\geq 0$ کەوا $\{x: x\geq 2\}$.



4. بواری نەخشەی $g\circ f$ بدۆزەوە کە $f(x)=x^2-1$، $g(x)=\frac{1}{x}$.

3–1 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 و 2 ڕوونکردنەوەی f و g بۆ وەڵامدانەوەی پرسیارەکانی خوارەوە بەکاربهێنە:

أ بوار و مەودای هەر نەخشەیەك دیاریبكە.

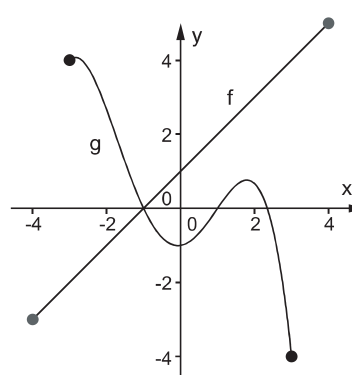
ب $f(-2)$ و $g(3)$ بدۆزەوە.

ج بەهاكانی x بدۆزەوە كە پاسەدانی $f(x)=g(x)$ دەكەن.

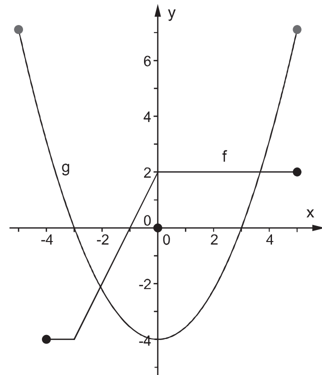
د شیكارێك بۆ هاوكێشەی $f(x)=2$ بخەملێنە.

هـ شیكارێك بۆ هاوكێشەی $g(x)=0$ بخەملێنە.

1



2



لەپرسیاری **3** تا **8** بەهایە داواكراوەكان ئەگەر لەتوانادا بۆ نەخشەكە هەژماربكە. ئەنجامەكان سادەبكە.

3 $f(x)=\sqrt{x+3}$ ؛ $f(-2)$ ، $f(6)$ ، $f(-5)$ ، $f(x+\Delta x)$

4 $f(x)=3-x^2$ ؛ $f(0)$ ، $f\left(\sqrt{3}\right)$ ، $f(-2)$ ، $f(t-1)$

5 $f(x)=\cos 2x$ ؛ $f(0)$ ، $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ، $f(-2)$ ، $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

6 $f(x)=x^3-x$ ؛ $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

7 $f(x)=x^3$ ؛ $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$: $\Delta x\neq 0$

8 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ ؛ $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

لە پرسیاری **9** تا **11** بوار و مەودای هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

9 $f(x)=-\sqrt{x+3}$

10 $f(t)=\ln(1\text{-}t)$

11 $f(x)=\frac{2}{x-1}$

لە پرسیاری **12** تا **14** بواری هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

12 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

13 $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

14 $f(x)=\frac{1}{|x+3|}$

لە پرسیاری **15** و **16** بەهایە داواكراوەكانی نەخشەكە بدۆزەوە.

15 $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x<0\\ 2x+2 & x\geq 0\end{cases}$ ؛ $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ ، $f(t^2+1)$

16 $f(x)=\begin{cases}|x|+1 & x<1\\ -x+1 & x\geq 1\end{cases}$ ؛ $f(0)$ ، $f(-3)$ ، $f(1)$ ، $f(3)$ ، $f(b^2+1)$

لە پرسیاری **17** و **18** بە ڕوونكردنەوەی بوار و مەودای هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

17 $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

18 $f(x)=2\sin\pi x$

دەربارەی چەمكەكان

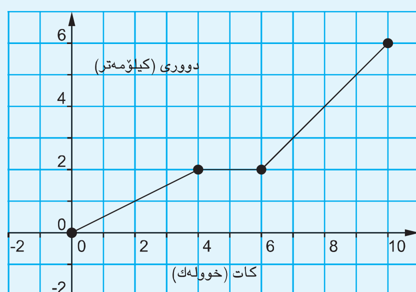
19 ڕوونكردنەوەی بەرامبەر ئەو دوورییە دەردەخات كە خوێندكارێك بە ئۆتۆمبیلەكەی بڕیویەتی (بەپێی كات لە كاتی دەرچوونی لە ماڵەوە بۆ زانكۆ.

خێراییەكەی لە نێوان $t=0$ ، $t=4$ چەندبوو؟

خێراییەكەی لە نێوان $t=4$ ، $t=6$ چەندبوو؟

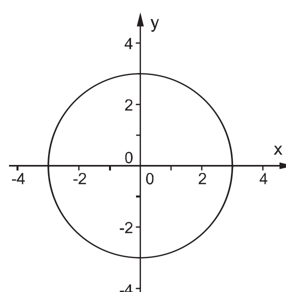
خێراییەكەی لە نێوان $t=6$ ، $t=10$ چەندبوو؟

باسی لێخوڕینی خوێندكارەكە بۆ ئۆتۆمبیلەكەی بكە.

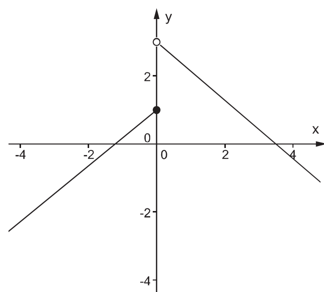


لە پرسیاری 20 و 21 دا، تاقیکردنەوەی ڕاستەهێڵی ئەستوونی بەکاربهێنە تا بڕیاربدەی ئەگەر وێنە ڕوونکردنەوەییەکە نەخشەیە یان نا.

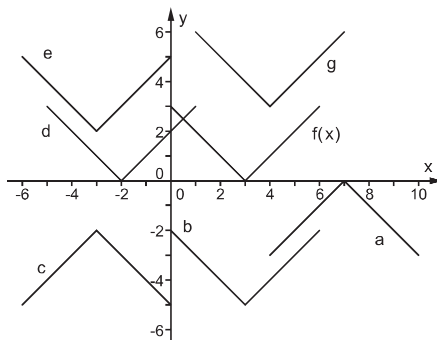
20



21



لە ڕاهێنانی 22 تا 27 ڕوونکردنەوەی $y=f(x)$ بۆ دیاریکردنی ڕوونکردنەوەی هەر نەخشەیەك بەکاربهێنە.



22 $y=f(x+5)$

23 $y=f(x)-5$

24 $y=-f(-x)-2$

25 $y=-f(x-4)$

26 $y=f(x+6)+2$

27 $y=f(x-1)+3$

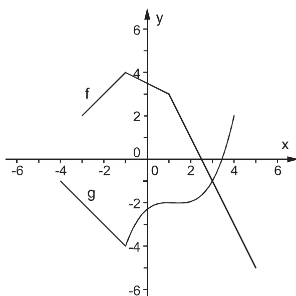
28 $(f\circ g)(x)$ و $(g\circ f)(x)$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=x^2$ و $g(x)=\sqrt{x}$. ئایا $f\circ g=g\circ f$ ؟

29 $(f\circ g)(x)$ و $(g\circ f)(x)$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=\sqrt{x+2}$. ئایا $f\circ g=g\circ f$ ؟

30 وێنەی ڕوونکردنەوەی بەرامبەر بۆ دۆزینەوەی بەهایە داواکراوەکان بەکاربهێنە.

أ $(f\circ g)(3)$ ب $g(f(2))$ ج $g(f(5))$

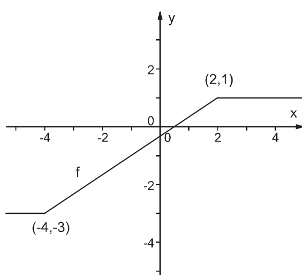
هـ $(f\circ g)(-3)$ د $(g\circ f)(-1)$ و $f(g(-1))$



31 ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\sqrt{x}$ بۆ کێشانی ڕوونکردنەوەی هەریەك لەم نەخشانەی خوارەوە بەکاربهێنە.

أ $g(x)=\sqrt{x}+2$ ب $h(x)=-\sqrt{x}$ ج $p(x)=\sqrt{x-2}$

32 ڕوونکردنەوەی نەخشەی f بەرامبەر بۆ کێشانی ڕوونکردنەوەی هەریەك لەم نەخشانەی خوارەوە بەکاربهێنە.



أ $f(x-4)$ ب $f(x+2)$ ج $f(x)+4$

هـ $f(x)-1$ د $2f(x)$ و $\frac{1}{2}f(x)$

33 **بازنەکان** شیرین بەردێکی بۆ ناو گۆمەئاوێکی وەستاو هەڵدا، چەند بازنەیەکی هاوچەقی یەك لەدوای یەك دروستبوو، نیوەتیرەی بازنە فراوانەکەیان بەپێی نموونەی $r = 0.6t$ زیاد دەکات، کە t هێمای کاتی تێپەڕبوو بەسەرهەڵدانی بەردەکەیە بە چرکە و r نیوەتیرەی بازنەکەیە بەپێ.
ڕووبەری بازنەکە بەپێی یاسای $A = \pi r^2$ هەژمار دەکرێت. نەخشەی $(A \circ r)(t)$ بدۆزەوە. ڕووبەری بازنە فروانەکە چەندە پاش 6 چرکە لە هەڵدانی بەردەکە؟

34 سێ نەخشەی f ، g ، h بدۆزەوە، بۆئەوەی $k = f \circ g \circ h$ کاتێك $k(x) = \sqrt{2x-2}$.

لە پرسیاری 35 تا 38 دیاریبکە ئەگەر نەخشەکە تاکە یان جووتە.

35 $f(x) = x^2\left(4 - x^2\right)$

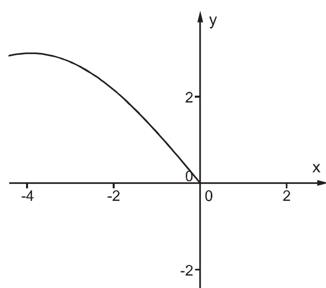
36 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

37 $f(x) = x\cos x$

38 $f(x) = \sin^2 x$

39 بواری نەخشەکە لە وێنەی بەرامبەر بریتییە لە $-5 \le x \le 5$ وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەهەربارێکدا تەواوبکە:

أ نەخشەکە جووت بێت. ب نەخشەکە تاك بێت.



کارامایە بیرکارییەکان لەوەی دێت 4 نەخشە و 4 خشتەی پێدراوەکان دەبینیت، ئەو نەخشەیە بدۆزەوە کە هەر خشتەیەك دەنوێنێت و بەهای c دیاریدەکات.

$k(x) = \frac{c}{x}$ $h(x) = c\sqrt{|x|}$ $g(x) = cx^2$ $f(x) = cx$

40

x	-4	-1	0	1	4
y	-32	-2	0	-2	-32

41

x	-4	-1	0	1	4
y	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1

42

x	-4	-1	0	1	4
y	-8	-32	پێناسە نەکراوە	32	8

43

x	-4	-1	0	1	4
y	6	3	0	3	6

ڕاست یان هەڵە؟ لە پرسیاری 44 تا 47 دیاریبکە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە، یان هەڵەیە بە دژە نموونەیەك بیسەلمێنە.

44 ئەگەر f نەخشەیەك بێت و $f(a) = f(b)$ ئەوا $a = b$.

45 دەکرێت ڕاستەهێڵێکی ئەستوون بەلایەنی زۆرەوە یەك جار ڕوونکردنەوەی نەخشە ببڕێت.

46 ئەگەر $f(-x) = f(x)$ ، x هەرژمارەیەکی بواری f بێت، ئەوا ڕوونکردنەوەی نەخشەکە هاوجێیە لەگەڵ تەوەری y .

47 ئەگەر f نەخشەیەك بێت، ئەوا $f(ax) = af(x)$.

48 **بیربکەوە** نەخشەی $f(x) = |x| + |x-2|$ بنووسە بەبێ بەکارهێنانی بەهای ڕووت.

بەشی 1

پێداچوونەوەی بەش

لە پرسیاری 1 تا 4 یەکتربڕینەکانی هەر نەخشەیەك دیاریبکە ئەگەر هەبوو.

1 $y = 2x - 3$ **2** $y = (x-1)(x-3)$ **3** $y = \frac{x-1}{x-2}$ **4** $y = \frac{4}{x}$

لە پرسیاری 5 و 6 دا ساغبکەوە ئەگەر ڕوونکردنەوەکە لەگەڵ چی دا هاوجێبوونی هەبێت.

5 $x^2y - x^2 + 4y = 0$ **6** $y = x\,(x^4 - x^2 + 3)$

لە پرسیاری 7 تا 10 ڕوونکردنەوەی هاوکێشەکە بکێشە.

7 $-\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y = 1$ **8** $f(x) = 7 - 6x - x^2$

9 $f(x) = \sqrt{5-x}$ **10** $f(x) = |x-4| - 4$

لە پرسیاری 11 و 12 خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی دوو نەخشەکە بدۆزەوە ئەگەر هەبوو.

11 $x + y = 5 \quad 3x - 4y = 8$ **12** $x - y + 1 = 0 \quad y - x^2 = 7$

13 **بیربکەوە** هاوکێشەی نەخشەیەك بنووسە کە ڕوونکردنەوەکەی هاوجێیە لەگەڵ خاڵی بنەڕەت وە دووخاڵی یەکتربڕینی ئاسۆیی $x = -2$ ، $x = 2$ هەیە.

14 **بیربکەوە** بەهای k چەندە کە وادەکات ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = kx$ بەخاڵە دیاریکراوەکە دابڕوات؟

أ $(1, 4)$ ب $(-2, 1)$ ج $(0, 0)$ د $(-1, -1)$

لە پرسیاری 15 و 16 لاری بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی بەهای t بۆئەوەی خاڵەکان بکەونە سەر یەك ڕاستەهێڵ.

15 $(-2, 5)$ ، $(0, t)$ ، $(1, 1)$ **16** $(-3, 3)$ ، $(t, -1)$ ، $(8, 6)$

لە پرسیاری 17 تا 20 هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بدۆزەوە کە بە خاڵە دیاریکراوەکە دا دەڕوات و لارییەکەشی دیاریکراوە.

17 $(0, -5)$ ؛ $m = \frac{3}{2}$ **18** $(-2, 6)$ ؛ $m = 0$

19 $(-3, 0)$ ؛ $m = -\frac{2}{3}$ **20** $(5, 4)$ لارییەکە پێناسە نەکراوە

21 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی کەبەخاڵی $(-2, 4)$ دادەڕوات بدۆزەوە و ئەو سیفەتەشی هەیە کە دیاریکراوە.

أ لارییەکەی $\frac{7}{16}$ ب تەریبە بە ڕاستەهێڵی $5x - 3y = 3$

ج بە خاڵی بنەڕەت دادەڕوات د تەریبە بە تەوەری y

22 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە دیاریبکە کە بە خاڵی $(1, 3)$ دادەڕوات و ئەو سیفەتەشی هەیە کە دیاریکراوە.

أ لارییەکەی $-\frac{2}{3}$ ب ئەستوونە لەسەر ڕاستەهێڵی $x + y = 0$

ج بەخاڵی $(2, 4)$ دادەڕوات د تەریبە بە تەوەری x .

23 **تێکڕای گۆڕان** نرخی ئامێرێکی نوێ 000 500 12 دینارە، ساڵانە نرخەکەی 000 850 دینار بەپێی بەکاربردنی کەمدەکات. نەخشەیەکی هێڵی بنووسە نرخی ئەو ئامێرە پاش t ساڵ لە کڕینی بنوێنێت. نرخەکەی دوای 3 ساڵ لەکڕینی دەبێتە چەند؟

24 $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x<0 \\ |x-2| & x\geq 0 \end{cases}$ بدۆزەوە.

أ $f(-4)$

ب $f(0)$

ج $f(1)$

25 بوار و مەودای هەر نەخشەیەك دیاریبکە.

أ $f(x)=\sqrt{36-x^2}$

ب $f(x)=\frac{7}{2x-10}$

ج $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 2-x & x\geq 0 \end{cases}$

26 $f(x)=1-x^2$ وَ $g(x)=2x+1$ بدۆزەوە.

أ $f(x)-g(x)$

ب $f(x)g(x)$

ج $g\left(f(x)\right)$

27 **ڕووبەر** شریتێك درێژییەکەی 24 m لاکێشەیەکی لێ دروست کرا کە لا بچووکەکەی x بێت.

أ ڕووبەری لاکێشەی(A) بەپێی x بنووسە.

ب بواری نەخشەی A دیاریبکە لە پاشاندا وێنەی ڕوونکردنەوەکەی بەپێی ئەو بوارەی دیاریتکرد بکێشە.

ج ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی گەورەترین ڕووبەر کە لاکێشەکە پێکدەهێنێت. ڕستەیەك لەسەر پێوانەکانی لاکێشەکە بنووسە کە گەورەترین ڕووبەر دەدات.

28 ڕوونکردنەوەیی ئەو نەخشەیە کە بوارەکەی {3، 2، 1، 0، 1–، 2–} بکێشە کە هەر بەهایەکی x لە بوار بە $y = x + 2$ دەبەستێتەوە.

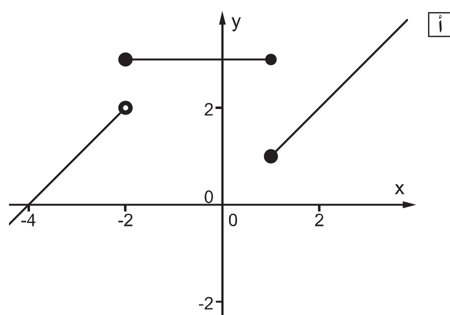
(تێبینی ئەوەبکە بواری نەخشەکە لە ژمارەیەکی سنووردار لەبەهەکان پێکهاتووە)

بەشی 1

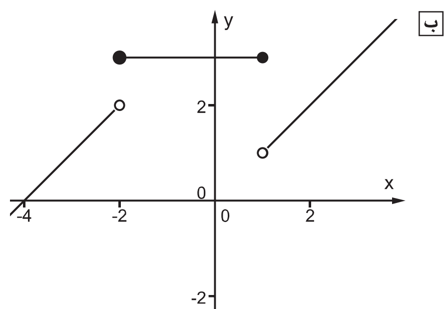
ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە

1 کام لەم ڕوونکردنەوانە نەخشە نانوێنێت؟

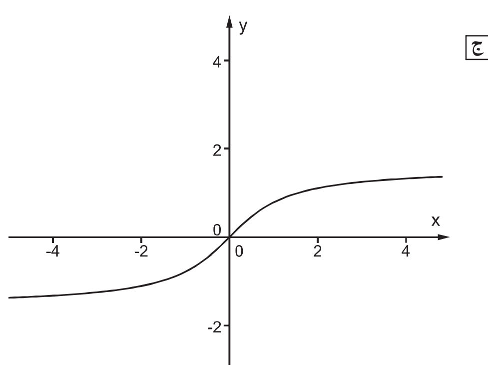
أ



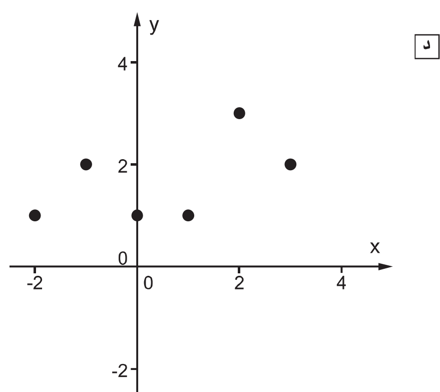
ب



ج



د



هـ هەموویان نەخشەن.

2 پۆوتانی خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی دوو نەخشەی $f(x)=3x+1$ و $g(x)=x^2-3$ کامەیە؟

أ $x=0$ ب $x=1$ و $x=4$ ج $x=-1$ و $x=-4$ د $x=-1$ و $x=4$

هـ جگە لەوانە

3 کام لەم نەخشانەی دێت تاکە؟

أ $f(x)=\cos x$ ب $f(x)=x^2-x+1$ ج $f(x)=x^3-x$ د $f(x)=x^2+x$

هـ هەموویان جووتن

4 کام لەم نەخشانەی دێت تاك نییە؟

أ $f(x)=\sin x+\frac{1}{x}$ ب $f(x)=x^2-x+1$ ج $f(x)=x^3-x$ د $f(x)=x^3+x$

هـ هەموویان تاکن

5 ڕاستەهێڵی $7x-3y=5$ بە کام لەم خاڵانەدا ناڕوات؟

أ $(2,3)$ ب $\left(1,\frac{2}{3}\right)$ ج $(4,11)$ د $\left(-\frac{1}{7},-2\right)$ هـ بەهەموو خاڵەکان دادەڕوات

6 لاری ئەو ڕاستەهێڵە کامەیە کە بەدوو خاڵی $(6,10)$ و $(-1,4)$ دادەڕوات؟

أ $\frac{7}{6}$ ب $-\frac{7}{6}$ ج $\frac{6}{7}$ د $-\frac{6}{7}$ هـ هیچ یەك لەمانە

7 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کامەیە کە بە خاڵی $(3,10)$ دادەڕوات و تەریبە بە ڕاستەهێڵی $x-3y=1$ ؟

أ $y=\frac{1}{3}x+9$ ب $y=3x+1$ ج $y=-3x+19$ د $y=-\frac{1}{3}x+11$ هـ هیچ یەك لەمانە

8 لاری ئەو ڕاستەهێڵە کامەیە کە ئەستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $2x+3y+9=0$ ؟

أ $\frac{2}{3}$ ب $-\frac{2}{3}$ ج $\frac{3}{2}$ د $-\frac{3}{2}$ هـ هیچ یەك لەمانە

9 $f(x)=\begin{cases}3x+4 & x\le 2\\ x^2+1 & x>2\end{cases}$. کام لەمانە یەکسانە بە $f(3)$ ؟

أ 13 ب 10 ج 5 د 3 هـ هیچ یەك لەمانە

10 $f(x)=x^2-3x+4$ کام لەمانە یەکسانە بە $f(x+2)-f(2)$ ؟

أ x^2-3x-4 ب x^2+x ج x^2+x-8 د x^2-3x+4 هـ هیچ یەك لەمانە

11 $f(x)=2-x^2$ کام لەمانە یەکسانە بە $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ؟

أ $\frac{x^2-h-h^2}{h}$ ب $\frac{-2x^2-h^2}{h}$ ج $-2x-h$ د $\frac{1}{2}$ هـ هیچ یەك لەمانە

12 بواری نەخشەی $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ کامەیە؟

أ $\{x/x\neq 1\}$ ب $\{x/x\neq -1\}$ ج $\{x/x\neq 0\}$ د R هـ هیچ یەك لەمانە

13 بواری نەخشەی $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ کامەیە؟

أ $]-\infty,-2[\cup]-2,1[\cup]1,+\infty[$ ب $]-\infty,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$

ج R د $]-\infty,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},+\infty[$ هـ هیچ یەك لەمانە

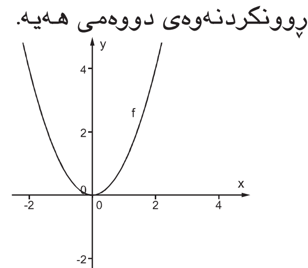
14 ئەو جێگۆڕکێیە کامەیە کە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^2$ بۆ ڕوونکردنەوەی نەخشەی $g(x)=(x+9)^2$ دەگۆڕێت؟

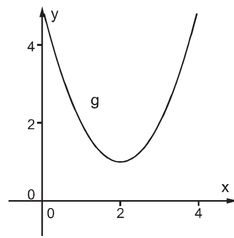
أ ڕاکێشان بۆلای سەرەوە بەبڕی 9 یەکە. ب ڕاکێشان بۆلای خوارەوە بەبڕی 9 یەکە.

ج ڕاکێشان بۆلای ڕاست بەبڕی 9 یەکە. د ڕاکێشان بۆلای چەپ بەبڕی 9 یەکە.

☐ هیچ یەك لەمانە

15 ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^2$ بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی هاوکێشەی نەخشەی g کە ڕوونکردنەوەی دووەمی هەیە.





أ $g(x)=(x-2)^2+1$ ب $g(x)=(x-1)^2+2$ ج $g(x)=(x+2)^2+1$

د $g(x)=(x+1)^2-2$ هـ هیچ یەك لەمانە

16 $(f+g)(x)$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=2x-4$ و $g(x)=1+3x$.

أ $5x-3$ ب $x-3$ ج $-(x+3)$ د 0 هـ هیچ یەك لەمانە

17 $(fg)(3)$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=x$ و $g(x)=x^2-7$.

أ -13 ب 29 ج 5 د 6 هـ هیچ یەك لەمانە

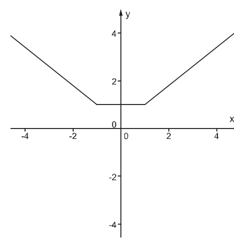
18 $(f\circ g)(x)$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=4-2x^2$ و $g(x)=2-x$.

أ $4x^2-16x+20$ ب $2x^2-4$ ج $2x^2-2$ د $-2x^3-4x^2-4x+8$

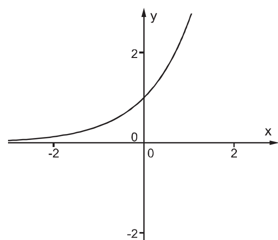
هـ هیچ یەك لەمانە

19 کام لەم ڕوونکردنەوانەی خوارەوە نەخشەی جیا نانوێنی؟

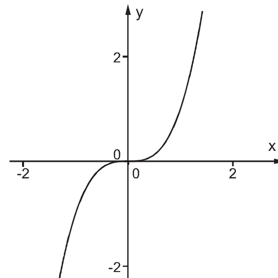
أ



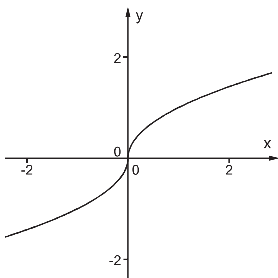
ب



ج



د



هـ هەموویان نەخشەی جیا نانوێنن.

20 سیفەتی نەخشەی $f(x)=3x^5-7x^2+2$ کامەیە کاتێك x دەچێت بۆ $-\infty$، و کاتێك دەچێت بۆ $+\infty$؟

أ نەخشەکە دەچێت بۆ $-\infty$ کاتێك x دەچێت بۆ $-\infty$؛ نەخشەکە دەچێت بۆ $+\infty$ کاتێك x دەچێت بۆ $+\infty$

ب نەخشەکە دەچێت بۆ $-\infty$ کاتێك x دەچێت بۆ $-\infty$؛ نەخشەکە دەچێت بۆ $-\infty$ کاتێك x دەچێت بۆ $+\infty$

ج نەخشەکە دەچێت بۆ $+\infty$ کاتێك x دەچێت بۆ $-\infty$؛ نەخشەکە دەچێت بۆ $-\infty$ کاتێك x دەچێت بۆ $+\infty$

د نەخشەکە دەچێت بۆ $+\infty$ کاتێك x دەچێت بۆ $-\infty$؛ نەخشەکە دەچێت بۆ $+\infty$ کاتێك x دەچێت بۆ $+\infty$

هـ هەموویان نەخشەی جیا نانوێنن.

بەشی

2

ئامانجەکان Limits

بەشی دووەم

وانەکان

هەندێك لە جوتیاران چەند جۆرێك لە زیندەوەری مشەخۆر بەکاردەهێنن بۆ پاراستنی چێندراوەکانیان لەدەردو بەڵایەکان. نەخشەی $D(t)=\frac{t^2}{90}+\frac{t}{3}$ نموونەیەکە بۆ زیادبوونی ئەو زیندەوەرانە لەسەر ڕووەکێکدا. تێکڕای گۆڕانی ئەو زیندەوەرانە چەندە؟ کاتێك 20 زیندەوەر لەسەر ڕووەکێك بێت.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

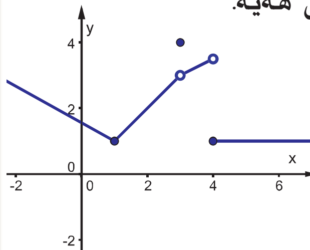
زاراوەکان

1 هەر دەستەواژەیەکی ستوونی لای ڕاست بە لێکدانەوەکەی لە ستوونی لای چەپ ببەستەوە.

1. نەخشەی ڕێژەیی — أ. بەهای x گەورەدەبێت و بێسنوور زیاد دەکات.
2. x نزیکدەبێتەوە لە $+\infty$ — ب. کۆمەڵەی ئەو بەهایانەی نەخشەکە وەریدەگرێت کاتێك x هەموو بەهایەکانی بوار وەردەگرێت.
3. نووسینی بڕێکی ڕێژەیی بە سادەترین شێوە — ج. نەخشەیەکە ڕێسایەکەی بڕێکی ڕێژەییە.
4. مەودای نەخشە — د. نەخشەیەکە بڕەکەی ڕێژەیەك لەخۆدەگرێت.
- هـ. نووسینی بڕێکە بە شێوەی ڕێژەی دووبڕی دوو ڕادەیی کە کۆڵکەی هاوبەش لە نێوانیاندا نییە.

خوێندنەوەی ڕوونکردنەوەکان

لە ڕاهێنانی 2 و 3دا نەخشەی f بەکاربهێنە کە ڕوونکردنەوەی بەرامبەری هەیە.



2 بەهای هەریەکە لە $f(1)$، $f(2)$، $f(3)$، $f(4)$، $f(5)$ بدۆزەوە.

3 ڕێسای نەخشەی f بنووسە.

کردارەکان لەسەر نەخشەکان

4 ڕێسای نەخشەی $f \circ g$ ونەخشەی $g \circ f$ بنووسە کە $f(x) = x + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$

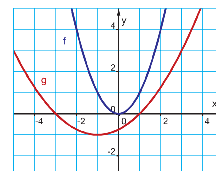
5 ئایا پەیوەندی پێچەوانە بۆ نەخشەی $y = 4x + 3$ لەنێوان گۆڕاوەکانی x و y نەخشەیە؟ ئەگەر وەڵامەکەت «بەڵێیە» پەیوەندییە پێچەوانەکە بە شێوەی نەخشە بنووسە ئەگەر وەڵامەکەت «نەخێرە» بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە

6 ئایا پەیوەندی پێچەوانەی نەخشەی $y = x^2$ لەنێوان دوو گۆڕاوی x و y نەخشەیە؟ ئەگەر وەڵامەکەت «بەڵێیە» پەیوەندییە پێچەوانەکە بە شێوەی نەخشە بنووسە ئەگەر وەڵامەکەت «نەخێرە» بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە.

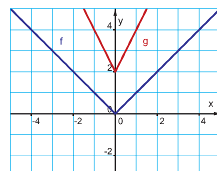
جێگۆڕکێی نەخشەکان

لە ڕاهێنانی 7 تا 10 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f و g دەردەکەوێت. ئەو جێگۆڕکێیە ئەندازەییە دیاریبکە کە وێنەی ڕوونکردنەوەی f بۆ وێنەی ڕوونکردنەوەی g دەبات و ڕێسای g بنووسە.

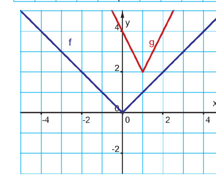
7



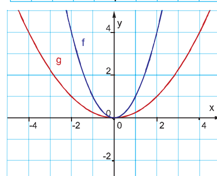
8



9



10



1–2 دەروازەیەك بۆ هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری
Introduction to Calculus

ئامانجەکان

- لەجیاکاری و تەواوکاری و جیاوازییەکی لە جەبر تێدەگات.
- تێدەگات کە بابەتی لێکەوت بابەتێکی بنەڕەتی جیاکاری و تەواوکارییە.
- تێدەگات کە بابەتەکانی ڕووبەر بابەتێکی بنەڕەتییە لە جیاکاری و تەواوکاری.

سوود

هەمیشە لەبیرت بێت جیاکاری و تەواوکاری وەك وانەیەکی بنەڕەتی لەو پۆلەدا دەخوێنێت. ئامانجی یەکەمت فێربوونی چۆنیەتی بەکارهێنانی ئەو بابەتەیە بۆ دروستکردنی نموونەکانی ژیانی ڕۆژانە بە ئامانجی شیکارکردنیان. ئەمەش بەبیرهێنانەوەی هەنگاوەکانی شیکارکردنی پرسیارەکانە:

1. لە تێگەیشتنی پرسیارەکە دڵنیابە پێدراوەکان چین؟ داواکراو چییە؟

2. پلان دابنێ، چەند ڕێگایەکی جیاواز هەیە دەتوانیت بەکاربهێنیت. بەدوای شێوازێك بگەڕێ. پرسیارێکی ئاسانتر شیکاربکە، بە هەنگاوەکانت دابچۆوە، وێنەیەکی ڕوونکردنەوەی دروستبکە.

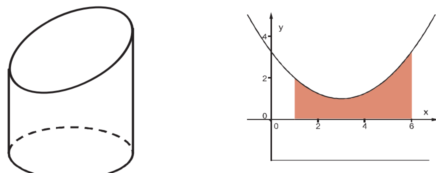
3. پلانەکەت جێبەجێبکە، دڵنیابە کە وەڵامی پرسیارەکەت داوەتەوە. وەڵامەکە دابڕێژە، بۆ نموونە لەجیاتی نووسینی وەڵامەکە $x = 4.6$ بنووسە، «ڕووبەری شێوەکە $4.6\ cm^2$»

4. بە هەنگاوەکاندا دابچۆوە ئایا وەڵامەکەت شیاوە؟ ئایا ڕێگایەك بۆ دڵنیابوون لەشیاویەکەی هەیە؟

جیاکاری و تەواوکاری چییە؟

هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری بریتییە لە بیرکاری گۆڕان (خێرایی و تاودان) هەروەها بریتییە لە بیرکاری ڕاستەهێڵی لێکەوت و لاری و ڕووبەرو قەبارەو درێژی و چەقی قورسایی و چەمانەوە و زۆر لەچەمکەکانی تر. ئەو بیرکارییە یارمەتی زانایەکان و ئەندازیارەکان و ئابووریناسەکانیدا بۆ دروستکردنی نموونە کارایەکان بۆ لێکۆڵینەوەی بارەکانی ژیانی ڕۆژانە. هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری بە بیرکاری جووڵە (Dynamic) دەناسرێت بە پێچەوانەی ئەو بیرکارییەی تاکو ئێستا فێریبوویت کە بەبیرکاری وەستاو Static وەسفدەکرێت ئەمەش چەند نموونەیەکە:

- دەتوانیت لێکۆڵینەوە بۆجوولانی تەنێك بەخێراییەکی نەگۆڕ بکەیت بەبەکارهێنانی ئەو بیرکارییەی تاکو ئێستا فێریبوویت لەکاتێکدا پێویستیت بە هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری دەبێت بۆ لێکۆڵینەوەی جووڵەی تەنێك خێراییەکەی بەپێی کات دەگۆڕێت.
- دەتوانیت لاری ڕاستەهێڵێك دیاریبکەیت بە بەکارهێنانی ئەو بیرکارییەی تاکو ئێستا فێریبوویت بەڵام بۆ دۆزینەوەی لاری چەماوەیەك لەخاڵێکدا پێویستیت بە هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری دەبێت.
- بۆ هەژمارکردنی ڕووبەر یان قەبارەی زۆر لەشێوە تەنە ئەندازەییەکان دەتوانیت ئەو بیرکارییەی تاکو ئێستا فێریبوویت بەکاریبهێنێت بەڵام، بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری شێوە نارێکەکان پێویستیت بەهەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری دەبێت، یان بۆ دۆزینەوەی قەبارەی ئەو تەنانەی باونین.

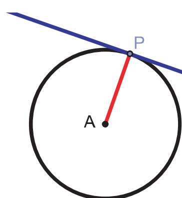


بارەکانی پێشوو هەمان کار لەخۆ دەگرن: دووبارە داڕشتنەوەی ئەوەی لەڕابردوودا فێریبوویت بەبەکارهێنانی چەمکەکانی ئامانج و هەروەها، یەکێك لە وەڵامەکانی پرسیاری هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری چییە؟ دەتوانین بڵێین هۆکارێکی ژمێرییارییە دەتوانرێت بنما تیۆرییەکانی هەژمار بکرێت لە مامەڵەکردن لەگەڵ ئامانجەکان و جێبەجێکردنە کردارییەکان لەسەر ڕێسا و یاسا وردەکان بەکاربهێنێت. بە دەستەواژەیەکی وردتر هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری سێ ئاست لەخۆدەگرێت ئاستی یەکەم: ئەو بیرکارییەی تاکو ئێستا فێربوویت و ئاستی دووەم: ئاستی ئامانجەکانە و ئاستی سێیەم: ئاستی داتاشراو و تەواوکارییە.

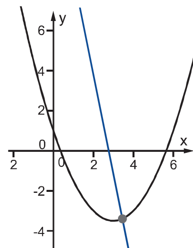
ئەو بیرکارییە تاکو ئێستا فێربوویت	←	ئامانجەکان	←	داتاشراو و تەواوکاری

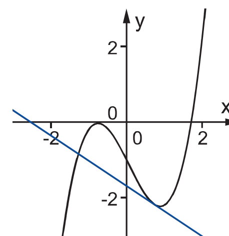
چەمکی ئامانج بەردی بناغەی لێکۆڵینەوەی جیاکاری و تەواوکاری پێکدەهێنێت. بۆ ئەوەی چەند بیرۆکەیەکت لە ڕۆڵی ئامانج لە هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری لا دروستبێت. ئەمە کورتە باسێکە بۆ دوو بابەتی مێژوویی لەم بابەتەدا: بابەتی لێکەوت و بابەتی ڕووبەر.

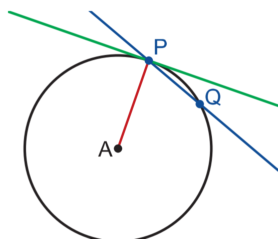
بابەتی لێکەوت



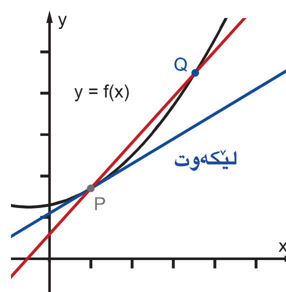
لە پۆلەکانی پێشوودا فێربوویت کە لێکەوتی بازنەیەك چەقەکەی A بێت، لەخاڵی P دا، بڕیتییە لەو ڕاستەهێڵەی بازنەکە تەنها لەخاڵی P دا دەبڕێت. بەشێوەیەکی گشتی ئەم پێناسە ڕاست نابێت کاتێك کارەکە پەیوەندی بە وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکانەوە هەبێت، هەروەك لەم دوو وێنەی خوارەوە دەردەکەوێت.



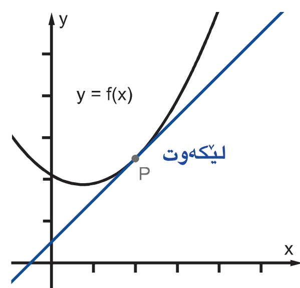




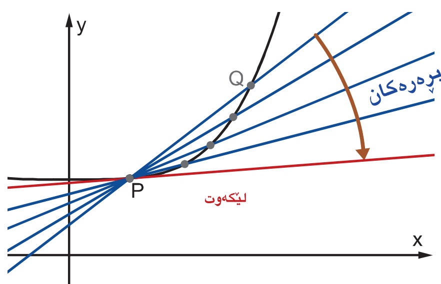
بەڵام لێکەوتی بازنە لەخاڵی Pدا لە ڕاستیدا، ئەوەیە بڕەری $\overleftrightarrow{PQ}$نزیکدەبێتەوە کاتێك خاڵی Q لەخاڵی P نزیکدەبێتەوە، لەژێر ڕۆشنایی ئەم تێبینییەوە ئەگەر تەماشای لێکەوتی وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی$f(x)$لەخاڵی P بکەین، وەك ئەوەی لە بڕەری $\overleftrightarrow{PQ}$ نزیکدەبێتەوە کاتێك خاڵیQ لە P نزیکدەبێتەوە.

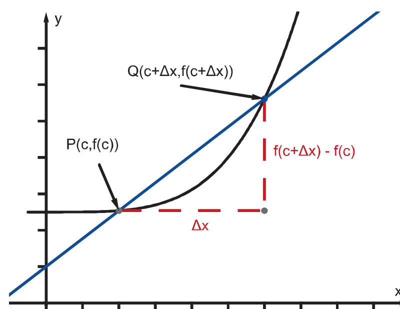


لە پرسیاری لێکەوت نەخشەی f و خاڵی P لەسەر ڕوونکردنەوەکەی دەدرێت، داوات لێدەکات لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەو خاڵەدا بدۆزیتەوە هەروەك لەوێنەی بەرامبەردا دەردەکەوێت.



جگە لەو بارانەی لێکەوتی ئەستوون دەگرێتە خۆ، پرسیاری دۆزینەوەی هاوکێشەی لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f لە خاڵی P دا بۆ دۆزینەوەی لاری ئەو لێکەوتە دەگەڕێتەوە، دەتوانیت هەژماری بەهای نزیکەیی ئەو لارییە بکەیت بەبەکارهێنانی ڕاستەهێڵێك کە بەخاڵی لێکەوت P و خاڵێکی تر لەسەر ڕوونکردنەوەی نەخشەکەدا دەڕوات، هەروەك لەوێنەی بەرامبەر دەردەکەوێت. ئەو ڕاستەهێڵە پێیدەوترێت بڕەری ڕوونکردنەوەی نەخشەکە. ئەگەر$P(c, f(c))$خاڵی لێکەوت بێت و $Q(c+\Delta x, f(c+\Delta x))$ خاڵێکی تر بێت لەسەر ڕوونکردنەوەی نەخشەکە ئەوا لاری ئەو ڕاستەهێڵەی بەو دوو خاڵەدا دەڕوات بریتییە لە. $m = \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{(c+\Delta x) - c} = \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$





هەر چەند خاڵی Q لەخاڵی P نزیکدەبێتەوە، لاری بڕەرەکە لەلاری لێکەوت نزیکدەبێتەوە، هەروەك لەوێنەی لای چەپی سەرەوە دەردەکەوێت. ئەگەر بۆ بڕەرەکە شوێنێکی کۆتایی هەبێت، ئەوا بەلاری لێکەوتەکە دەوترێت ئامانجی لاری بڕەرەکە. (دوایی دەگەڕێینەوە بۆ ئەو بابەتە).

دۆزینەوە

ئەو خاڵانەی دێن دەکەونە سەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^2$.

$.Q_3(1.01, f(1.01))$ ، $Q_2(1.1, f(1.1))$ ، $Q_1(1.5, f(1.5))$

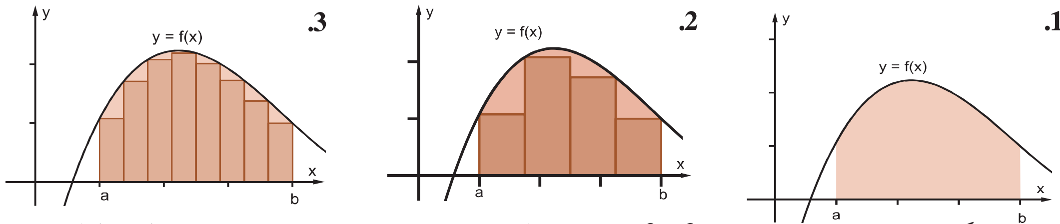
$.Q_5(1.0001, f(1.0001))$ ، $Q_4(1.001, f(1.001))$

ئەو خاڵانە یەك لەدوای یەك لە خاڵی $P(1,1)$ نزیکدەبنەوە. لاری ئەو ڕاستەهێڵەی بەخاڵی P و Q_1 و ئەو ڕاستەهێڵەی بە خاڵی P و Q_2 ... دا دەڕوات هەژماربکە. لەهەمان ڕووتەختی پۆوتانەکان وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکەو ڕاستەهێڵەکانی کە لارییەکانیان هەژمارکراوە بکێشە. ئەو ئەنجامانەی دەستتکەوتووە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای نزیکەیی لاری لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە. لەخاڵی P دا.

بابەتی ڕووبەر

لە بابەتی لێکەوت بینیت چۆن چەمکی ئامانج لەسەر لاری لێکەوت بەمەبەستی دۆزینەوەی لاری نەخشە جێبەجێکرا، دووەم بابەتی مێژوویی جیاکاری و تەواوکاری بریتییە لە بابەتی هەژمارکردنی ڕووبەری ئەو ناوچەیەی بە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە سنووردراوە. دەتوانرێت ئەم پرسیارانە بە بەکارهێنانی چەمکی ئامانج شیکاربکرێت. ئەو چەمکە بە بەکارهێنانی ڕووبەری لاکێشە جێبەجێدەکرێت بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری ئەو ناوچانەی باونین.

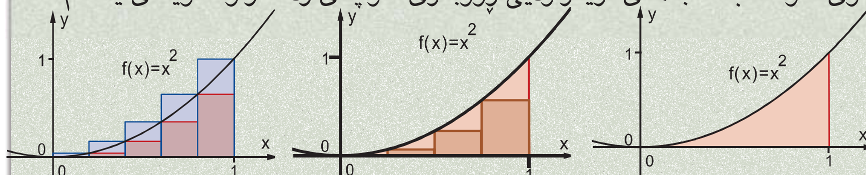
بۆ نموونە: لەو ناوچەیە ڕابمینێ کە بە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y=f(x)$ وتەوەری x و هەردوو ڕاستەهێڵی ستوونی $x=a$ و $x=b$ سنووردراوە وەك لەو وێنەیەدا دەردەکەوێت.



ئەگەر سەیری هەردوو شێوەی 2 و 3ی سەرەوە بکەیت، دەبینیت سەرجەمی ڕووبەری لاکێشەکان دەکاتە بەهای نزیکەیی ڕووبەری ناوچەکە، هەرچەند ژمارەی لاکێشەکان زیادبکات سەرجەمی ڕووبەرەکانیان لەڕووبەری ناوچەکە زیاتر نزیکدەبێتەوە، چونکە ڕووبەری ئەو ناوچەیەی کەوتۆتە نێوان ڕوونکردنەوەی نەخشەکەو لاکێشەکان تادێت بچووك دەبێتەوە، بۆ دەستکەوتنی ڕووبەری ناوچەکە پێویستە ئامانجی سەرجەمی ڕووبەری لاکێشەکان بدۆزێتەوە «ئەگەر هەبوو»، کاتێك ژمارەی لاکێشەکان بەبەردەوامی زیاددەکات.

دۆزینەوە

سەیری ناوچەی سنووردراو بە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^2$ و هەردوو ڕاستەهێڵی $y=0$ و $x=1$ بکە، دەتوانیت ڕووبەری ناوچەکە نزیکبکەیتەوە بە بەکارهێنانی دوو کۆمەڵە لاکێشە، یەکەمیان بە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە دەورەدراوە و دووەمیان بەدەوری ڕوونکردنەوەکەی. وەك لە وێنەکانی دووەم و سێیەمی خوارەوە دەردەکەوێت، ڕووبەری هەریەکە لە دوو کۆمەڵە لاکێشەکە بدۆزەوە، بەهۆی ئەو ئەنجامە بەهای نزیکراوەیی ڕووبەری ناوچەی ڕەنگکراو لە وێنەی یەکەم بدۆزەوە.



1-2 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تاکو 9 دیاریبکە، ئایا دەتوانیت پرسیارەکە بەبێ بەکارهێنانی چەمکی ئامانج شیکاربکەیت.

1 تەنێك لەسەر هێڵێکی ڕاست بەپێی یاسای $d = 3t^2$ دەجوڵێت، کە t کاتە بە چرکە و d دووریيە بە مەتر، بەپێی h ناوەندە خێرایی لەنێوان ساتەکانی $t = 10$ و $t = 10 + h$ بدۆزەوە، پاشان خێرایی تەنەکە لەوساتەی $t = 10$ بدۆزەوە.

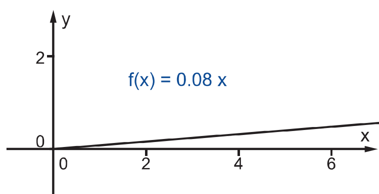
2 لاری لێکەوتی نەخشەی $y = x^2$ لەخاڵی $(3, 9)$دا بدۆزەوە.

3 ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y = \frac{1}{x}$ لە ماوەی $[0, 2]$ بکێشە ماوەکە بۆ 8 بەشی یەکسان دابەشبکە، لاکێشەکان بەکاربهێنە بۆ دەورەدانی ڕووبەری ناوچەی دیارکراو بە چەماوەی ڕوونکردنەوەییەکە و تەوەری x و هەردوو ڕاستەهێڵی $x = 1$ و $x = 2$.

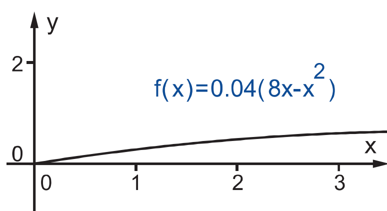
4 ئەو دوورییە بدۆزەوە کە تەنێکی جوڵاو لەماوەی 15 چرکەدا دەیبڕێت، ئەگەر خێراییەکەی 7 مەتربێت لە چرکەیەکدا.

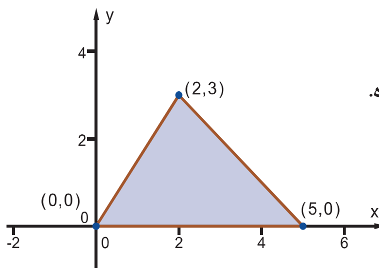
5 تەنێك بەخێراییەکی گۆڕاو بەپێی کات دەگۆڕێ بە ڕێسای $v(t) = 5 + 7\cos t$، t کاتە بەچرکە و $v(t)$ خێرایی تەنەکەیە بەمەتر لە چرکەدا، ئەو دوورییەی تەنەکە دەیبڕێت لەماوەی 15 چرکەدا بدۆزەوە.

6 خاڵێك لەسەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = 0.08x$ دەجوڵێت کە x بەرەو پێشچوونی ئاسۆیی خاڵەکەیە، $f(x)$ بەرزییەکەی بەرامبەری دەنوێنێت. تێکرای گۆڕانی بەرزی خاڵەکە لە $x = 2$ بدۆزەوە.



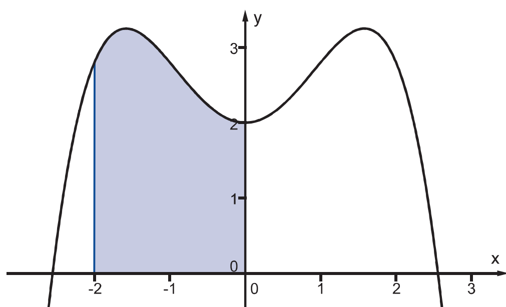
7 خاڵێك لەسەر ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x) = 0.04(8x - x^2)$ دەجوڵێت کە x بەرەو پێشچوونی ئاسۆیی خاڵەکە دەنوێنێت، $f(x)$ بەرزییەکەی بەرامبەری دەنوێنێت تێکرایی گۆڕانی بەرزی خاڵەکە لە $x = 2$ بدۆزەوە.





8 بەهای نزیکراوەیی ڕووبەری ناوچەی سێبەرکراوەکە بدۆزەوە.

9 بەهای نزیکراوەیی ڕووبەری ناوچە سێبەرکراوەکە بدۆزەوە.



10 نەخشەی $f(x)=4x-x^2$ وخاڵی $P(1,3)$ کە دەکەوێتە سەر ڕوونکردنەوەکەی بەکاربهێنە.

أ وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f و برەرەکانی بکێشە کە بەخاڵی P و خاڵی $Q(x,f(x))$ دا دەڕوات. کاتێك x بەهایەکانی 2، 1.5، 0.5 یەك لەدوای یەك وەردەگرێت.

ب لاری هەریەك لە سێ برەرەکە بدۆزەوە.

ج ئەنجامەکانی پرسیاری ب بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی لاری لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەخاڵی Pدا. باسبکە چۆن دەتوانیت بەهای لاری لێکەوتەکە لەبەها ڕاستییەکەی نزیك و نزیکتربکەیتەوە.

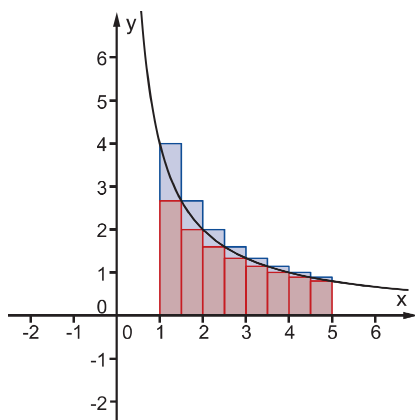
11 نەخشەی $f(x)=\sqrt{x}$ وخاڵی $p(4,2)$ کە دەکەوێتە سەر ڕوونکردنەوەکەی بەکاربهێنە.

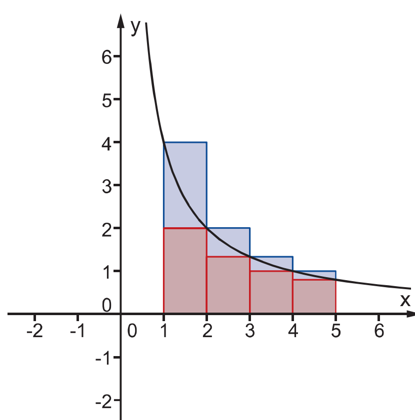
أ وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f و برەرەکانی بکێشە کە بەخاڵی P وخاڵی $Q(x,f(x))$ دا دەڕوات کە x بەهایەکانی 1 ، 3 ، 5 یەك لەدوای یەك وەردەگرێت.

ب لاری هەریەك لە برەرەکانی بدۆزەوە.

ج ئەنجامەکانی پرسیاری ب بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی لاری لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەخاڵی Pدا. باسبکە چۆن دەتوانیت بەهای لاری لێکەوتەکە لەبەها ڕاستییەکەی نزیك و نزیکتربکەیتەوە.

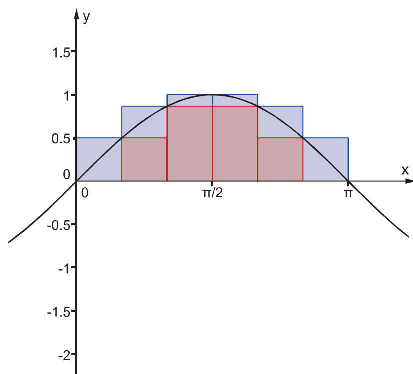
12 أ لاکێشەکان لەهەر وێنەیەك بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای نزیکراوەیی ڕووبەری ناوچەی سنووردراو بە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{4}{x}$ و ڕاستەهێڵەکانی $y=0$ و $x=1$ و $x=5$.

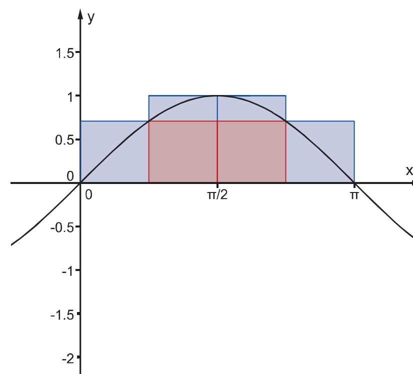




ب ڕوونیبکەوە چۆن دەتوانیت لەو کردارە بەردەوام بێت بۆ دەستکەوتنی بەهای ڕووبەری ناوچەکە کە لە بەها ڕاستەقینەکەی زیاتر و زیاتر نزیکدەبێتەوە.

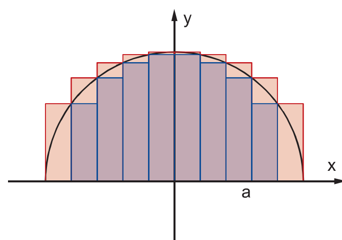
13 أ لاكێشەكان لەهەر وێنەیەك بەكاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای نزیككراوەیی ڕووبەری ناوچەی سنووردراو بە ڕوونكردنەوەی نەخشەی $f(x)=\sin x$ و ڕاستەهێڵەكانی $y=0$ و $x=0$ و $x=\pi$.





ب ڕوونیبكەوە چۆن دەتوانیت لەو كردارە بەردەوام بیت بۆ دەستكەوتنی بەهای ڕووبەری ناوچەكە كە لەبەهای ڕاستییەكەی زیاتر و زیاتر نزیكدەبێتەوە.

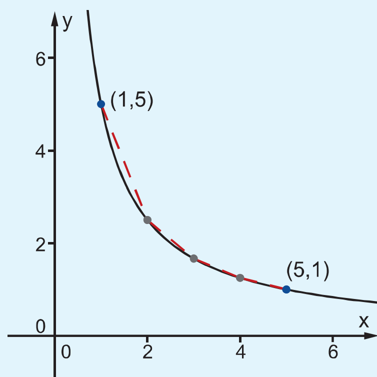
14 لاكێشەكان بەكاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای نزیكراوەیی ڕووبەری نیوە بازنەیەك تیرەكەی 2a بێت. چی دەكەیت بۆ دەستكەوتنی بەهای نزیك ونزیكتر لە ڕووبەری نیوە بازنەكە؟

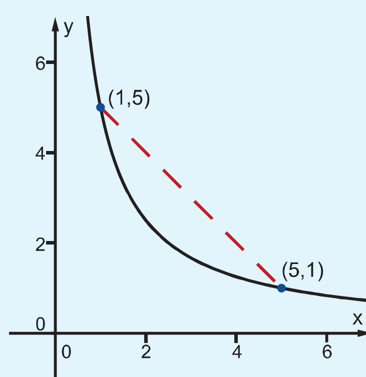


دەربارەی چەمكەكان

15 ڕوونكردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{5}{x}$ لەنێوان دوو خاڵی $(1,5)$ و $(5,1)$ بەكاربهێنە.

أ بەهای نزیكراوەیی درێژی «كەوانەی» چەماوەی ڕوونكردنەوەی نێوان دوو خاڵەكە بدۆزەوە، بەهەژماركردن دووری نێوان دوولای كەوانەكە، هەروەك لەوێنەی یەكەم دەردەكەوێت؟





ب بەهای نزیكراوەیی نوێ بۆ درێژی كەوانەی ڕوونكردنەوەكە بدۆزەوە، بە دۆزینەوەی سەرجەمی درێژی چوار پارچە ڕاستەهێڵەكە، وەك لەوێنەی دووەم دەردەكەوێت.

ج ڕوونیبكەوە، چۆن دەتوانیت لەسەر ئەو كردارە بەردەوام بیت بۆ دەستكەوتنی بەها نزیككراوەكانی درێژی كەوانەی ڕوونكردنەوەكە كە زۆر نزیك بێت لە درێژییە ڕاستەقینەكەی.

2–2

دۆزینەوەی ئامانجەکان بە ڕوونکردنەوەیی و ژمارەیی
Finding Limits Graphically and Numercially

ئامانجەکان

- بەهای ئامانج دەخەملێنێت بە بەکارهێنانی ڕێگای وێنەی ڕوونکردنەوەیی یان ژمارەیی.
- ئەو بارە جیاوازانە فێر دەبێت، کە ئامانجی نییە

زاراوەکان
Vocabulary

ئامانج Limit

دەروازەیەك بۆ ئامانجەکان

وادابنێ وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی

$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} : x \neq 1$ دەکێشین کە.

دەتوانیت وێنەی ڕوونکردنەوەی ئەو نەخشە بەچەندەها خاڵ جگەلە $x = 1$ بکێشێت، لەلایەکی تر وێنەکە لە $x = 1$ ڕوون نییە چۆن دەبێت. بۆ ئەوەی بیرۆکەیەکت لەلا دروستبێت لە چۆنیەتی سیفەتی نەخشەی f لە هاوسێی $x = 1$ ، دەتوانیت دوو کۆمەڵە بەها بۆ گۆڕاوی x بەکاربهێنێت، کۆمەڵەی یەکەم لەو بەهایانە پێکدێت کە زیاترو زیاتر لەلای چەپ لە 1 نزیکدەبنەوە و کۆمەڵەی دووەم لەو بەهایانە پێکدێت کە زیاتر و زیاتر لەلای ڕاست لە 1 نزیکدەبنەوە.

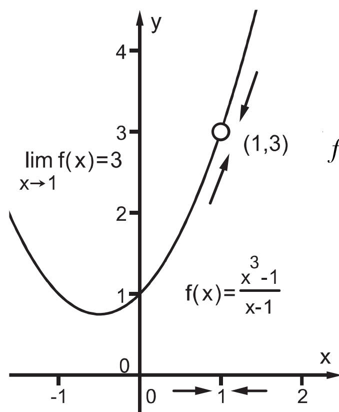
بەهایەکانی x لەلای چەپ لە 1 نزیکدەبنەوە ← → بەهایەکانی x لەلای ڕاست لە 1 نزیکدەبنەوە

x	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
$f(x)$	2.313	2.710	2.970	2.997	؟	3.003	3.030	3.310	3.813

بەهایەکانی $f(x)$ لە لای چەپ لە 3 نزیکدەبنەوە. ← → بەهایەکانی $f(x)$ لە لای ڕاست لە 3 نزیکدەبنەوە.

تێبینە ئەوە بکە هەرچەندە x بەهای $x = 1$ وەرناگرێت، بەڵام دەتوانرێت بەهایەکە لە 1 زیاترو زیاتر نزیکبکرێتەوە لەمەوە دەردەچێت بەهایەکانی $f(x)$ زیاترو زیاتر لە 3 نزیکدەبێتەوە ئەمە بە نووسین بەم شێوەیە دەردەبڕین.

$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$ بخوێنەوە: ئامانجی $f(x)$ کاتێك x لە 1 نزیکدەبێتەوە یەکسانە بە 3



ئەم شیکردنەوەی پێشوو دەمانگەینێتە پێناسەی ئامانج. بەهای $f(x)$ زیاترو زیاتر لە ژمارەی L نزیکدەبێتەوە کاتێك x زیاترو زیاتر لە ژمارەی دیاریکراوی c لەهەردوو لای نزیکدەبێتەوە، ئەوا L دەکاتە ئامانجی $f(x)$ کاتێك x لە c نزیکدەبێتەوە، ئەمە بە نووسین بەم شێوەیە دەردەبڕین: $\lim_{x \to c} f(x) = L$

دۆزینەوە

لە نموونەکانی پێشوو ڕوونده‌بێتەوە چۆن ئامانجێکی دیاریکراو دەخەملێنیت، بە ژمارەیی بە دروستکردنی خشتەی بەهایەکان، و بەڕوونکردنەوەیی بەکێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە خشتەی بەهایەکان بۆ خەملاندنی ئەو ئامانجە بەکاربهێنە.

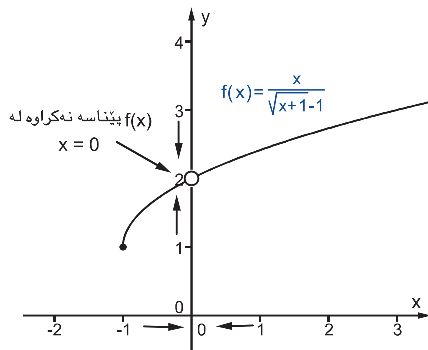
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

x	1.75	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.25
$f(x)$	؟	؟	؟	؟	؟	؟	؟	؟	؟

نموونە 1

خەملاندنی ئامانج بە ژمارەیی

بەهایەکانی نەخشەی $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ هەژماربکە کاتێك x چەند بەهایەکی نزیك لە $x = 0$ وەردەگرێت ئەوەی دەستتدەکەوێت بەکاریبهێنە بۆ پێدانی بەهای نزیکراوەی ئامانجی $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$.



شیکار

لەم خشتەی خوارەوە بەهایەکانی $f(x)$ دەردەکەوێت کاتێك x چەند بەهایەکی نزیك لە $x = 0$ وەردەگرێت.

بەهایەکانی x لەلای چەپ لە 0 نزیکدەبنەوە — بەهایەکانی x لەلای ڕاست لە 0 نزیکدەبنەوە

x	−0.01	−0.001	−0.0001	0	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	1.99499	1.99950	1.99995	؟	2.00005	2.00050	2.00499

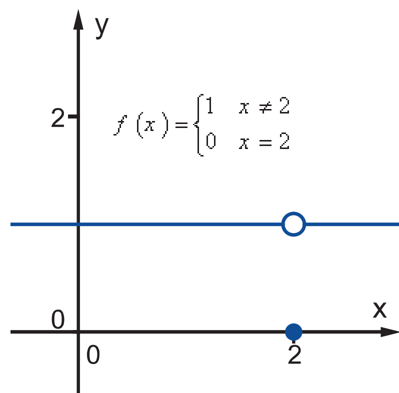
بەهایەکانی $f(x)$ لە لای چەپ لە 2 نزیکدەبنەوە. — بەهایەکانی $f(x)$ لە لای ڕاست لە 2 نزیکدەبنەوە.

لە ئەنجامەکانی خشتەکە دەردەکەوێت دەتوانرێت 2 ببەهای نزیکراوەیی ئامانجی نەخشەی f دابنرێت کاتێك x لە 0 نزیکدەبێتەوە، وێنە ڕوونکردنەوەکەش ئەو دەرئەنجامە دووپاتدەکاتەوە لە نموونەی 1 تێبینی بکە کە نەخشەکە پێناسەنەکراوە لە $x = 0$، سەرەڕای ئەوەش دەردەکەوێت. نەخشەکە لەئامانج نزیکدەبێتەوە کاتێك x لە 0 نزیکدەبێتەوە، زۆرجار ئەمە ڕوودەدات، بۆیە گرنگە ئاگاداربین کە نەخشەکە پێناسەکرابێت یان نا لە $x = c$ کارناکاتە سەر هەبوونی ئامانجی $f(x)$ کاتێك x لە c نزیکدەبێتەوە.



1. بەهایەکانی نەخشەی $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ هەژماربکە کاتێك x چەند بەهایەکی نزیك لە $x = 0$ وەردەگرێت ئەوەی دەستتدەکەوێت بەکاریبهێنە بۆ پێدانی بەهای نزیکراوەیی ئامانجی $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$.

نموونـــه 2 ئامانجی نەخشەی ڕێسا پەلدار



ئامانجی نەخشە $f(x)=\begin{cases}1 & x\neq 2\\0 & x=2\end{cases}$ **بدۆزەوە.**

کاتێك x نزیکدەبێتەوە لە 2 .

شیکار

لەبەرئەوەی $f(x)=1$ کاتێك x بەهای جیاواز لە 2 وەردەگرێت. لەمەوە دەردەچێت ئامانجەکە دەکاتە 1 وەك لەوێنەکەی بەرامبەر دەردەکەوێت. دەتوانیت بنووسیت $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$

ئەگەر $f(x)$ لە $x=2$ پێناسەکرابێت وئەگەر $f(2)=0$ کارناکاتە سەر هەبوونی ئامانجەکەو بەهایەکەی، ئەگەر بێتو نەخشەکە بەم شێوەی دێت پێناسەکرابوایە.

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\neq 2\\2 & x=2\end{cases}$$

هیچ لە ئامانجەکە نەدەگۆڕا.



.2 $f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\0 & x=0\\-x-1 & x>0\end{cases}$

ئامانجی نەخشەکە بدۆزەوە کاتێك x لە 0 نزیکدەبێتەوە.

تا ئێستا ئامانجەکانت بە ژمارەیی و ڕوونکردنەوەیی دەخەملاند، لەوانەی داهاتوودا ڕێگای جەبری فێردەبیت بۆ دۆزینەوەی ئامانجەکان، هەوڵبدە لەماوەی خوێندنی جیاکاری و تەواوکاری پەرە بەو سێ ڕێگایە بدەیت بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی ئامانج.

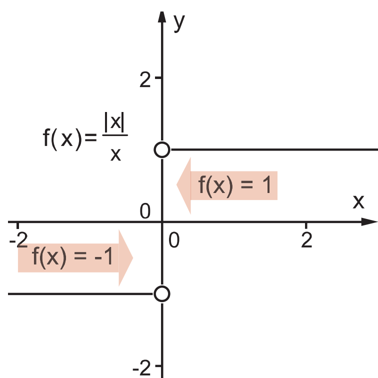
- ڕێگا ژمارەییەکان دروستکردنی خشتەی بەهایەکان بۆ نەخشەکە.
- ڕێگا ڕوونکردنەوەییەکان کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە.
- ڕێگا جەبرییەکان بەکارهێنانی جەبر یان هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری.

نەبوونی ئامانجەکان

لەم سێ نموونەی دێت ئەو بارانە دەردەکەوێت کە ئامانج هەموو جارێك بوونی نییە.

نموونـــه 3

كاتێك سیفەتی لای چەپ و ڕاستی جیاواز دەبێت



دیاریبکە ئامانجی $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ بوونی نییە.

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{|x|}{x}$ بکێشە. ئەگەر سەیری ڕوونکردنەوەی شێوەی بەرامبەر بکەیت، دەبینیت کە $\frac{|x|}{x}=1$ کاتێك $x>0$ و $\frac{|x|}{x}=-1$ کاتێك $x<0$ ئەمەش ئەوە دەگەیێنێت کە بەهایەکانی $f(x)$ مووجەب دەبن بەهای x لەلای ڕاستی 0 هەرچەندبێت، وسالب دەبن بەهای x لەلای چەپی 0 هەرچەندبێت. بەمەش نزیکبوونەوەی بەهایەکانی $f(x)$ لەهەمان بەها ئەستەم دەبێت، کاتێك x لە لای ڕاست یان لەلای چەپ لە 0 نزیکدەبێتەوە. لەوەش دەردەچێت کە نەخشەکە ئامانجی نییە کاتێك x لە 0 نزیکدەبێتەوە.



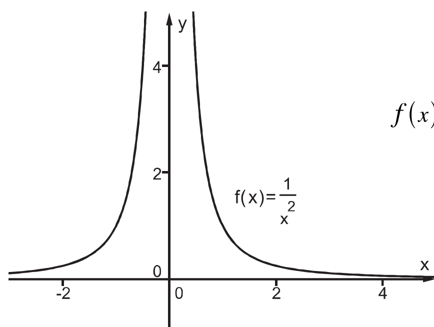
3. ڕوونیبکەوە کە ئامانجی $\lim_{x\to 0} f(x)$ کاتێك $f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ x+1 & x>0\end{cases}$ بوونی نییە.

نموونـــه 4

سیفەتی بێسنوور

دیاریبکە ئایا $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ بوونی هەیە یان نا.

شیکار



شێوەی بەرامبەر وێنە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ڕوون دەکاتەوە، دەبینین بەهای $f(x)$ بێسنوور زیاددەکات هەرچەند x لەلای چەپ یان لەلای ڕاست لە 0 نزیکدەبێتەوە، ئەمەش ئەوە دەگەیێنێت، دەتوانرێت بەهای $f(x)$ گەورە بکرێت بەپێی ئەوەی دەتەوێت بەهەڵبژاردنی بەهایەك بۆ x نزیك بێت لە 0.

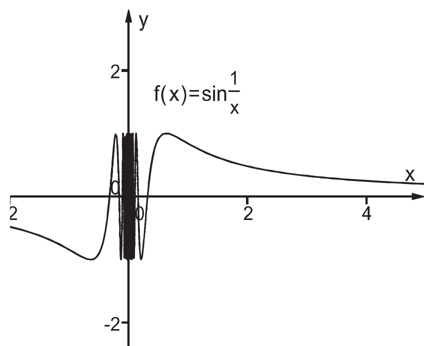
بۆ نموونە: دەتوانیت بەهای $f(x)$ گەورەتر بکەین لە 100 ئەگەر بەهایەك بۆ x کەمێك دوورتر لە $\frac{1}{10}$ لە 0 هەڵبژێرین، بێگومان ئەگەر $0<|x|<\frac{1}{10}$ ئەوا $f(x)=\frac{1}{x^2}>100$ هەروەها دەتوانیت بەهای $f(x)$ گەورەتربکەین لە $1\,000\,000$ ئەگەر بەهاییەك بۆ x کەمێك دوورتر لە $\frac{1}{1000}$ لە 0 هەڵبژێرین چونکە لە پەیوەندی $0<|x|<\frac{1}{1000}$ دەردەچێت $f(x)=\frac{1}{x^2}>1\,000\,000$ لەبەرئەوەی $f(x)$ لە هیچ ژمارەیەکی دیاریکراوی L نزیك نابێتەوە، کاتێك x نزیکدەبێتەوە لە 0 لەبەرئەوە ئامانجی نەخشەکە بوونی نییە.



4. دیاربکە ئایا $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$ بوونی هەیە یان نا.

نموونـــــه 5 سیفەتی لەرەلەردار

لەبوونی ئامانجی $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ بکۆڵەوە.



شیکار

لەشێوەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ دەردەکەوێت دەبینیت بەهای $f(x)$ لەنێوان 1 و 1− لەرەلەر دەکات هەرچەند x لەلای ڕاست یان لەلای چەپ لە 0 نزیکدەبێتەوە، بێگومان هەمیشە دەتوانیت دوو بەهای x_1 و x_2 نزیك لە 0 بۆ گۆڕاوی x هەڵبژێریت بەپێی ئەوەی دەتەوێت و پاسادانی $f(x_1)=\sin\frac{1}{x_1}=1$ و $f(x_2)=\sin\frac{1}{x_2}=-1$ بکات وەك لەم خشتەیەی خوارەوە دەردەکەوێت.

x	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{2}{7\pi}$	$\frac{2}{9\pi}$	$\frac{2}{11\pi}$	$x\to 0$
$f(x)$	1	−1	1	−1	1	−1	ئامانج بوونی نییە



5. لەبوونی ئامانجی $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ بکۆڵەوە.

جۆرەکانی سیفەتی ئاوڵ بۆ نەبوونی ئامانج

1. کاتێك x لەلای ڕاست لە c نزیکدەبێتەوە. بەهایەکانی $f(x)$ لە ژمارەیەك نزیکببێتەوە جیاوازە لەو ژمارەییەی کاتێك x لەلای چەپ لە c نزیکدەبێتەوە.

2. بەهایەکانی $f(x)$ بێسنوور زیاددەکەن یان کەمدەکەن کاتێك x لە c نزیکدەبێتەوە.

3. بەهایەکانی $f(x)$ لەنێوان دوو ژمارەی نەگۆڕی جیاواز لەرەلەر بکات کاتێك x لە c نزیکدەبێتەوە.

زۆر نەخشەی تر هەن سیفەتی نائاساییان هەیە کاتێك x لە بەهای دیاریکراوی c نزیکدەبێتەوە، لەو نەخشانەش نەخشەی دیریکلیە Dirichlet function کە بەم شێوەیە پێناسەکراوە.

(Q کۆمەڵەی ژمارە ڕێژەییەکان)

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in Q\\ 1 & x\notin Q\end{cases}$$

ئەم نەخشەیە ئامانجی نییە کاتێك x لەهەر بەهایەکی ڕاستی c نزیکدەبێتەوە بۆیەش لە هیچ ژمارەیەکی ڕاستی بەردەوام نییە، لەوانەی داهاتوو بەردەوامی نەخشەکان دەخوێنین.

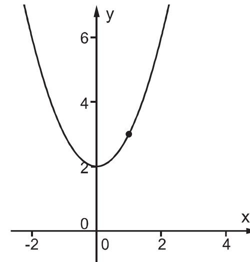


بێتر دیریکلیە 1805–1859
دیریکلیە یەکەم کەس بوو پێناسەی نوێی بۆ نەخشە کرد، بەپێشت بەستن بەو نەخشەیەی بەناوی ئەو نووسراوە.

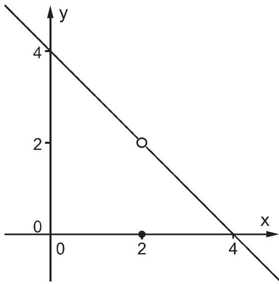
2-2 ڕاهێنان

له ڕاهێنانی 1 تا 6 ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ئامانجەکە ئەگەر هەبوو، ئەگەر ئامانجەکە نەبوو هۆیەکەی ڕوونبکەوە.

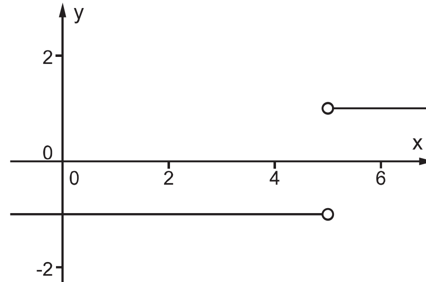
1 $\lim_{x\to1}\left(x^2+2\right)$



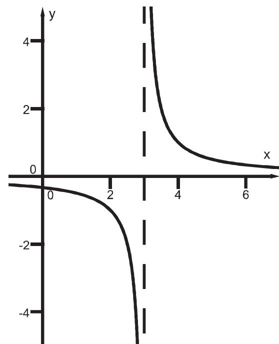
2 $\lim_{x\to2} f(x)$ کاتێك $f(x)=\begin{cases}4-x & x\neq2\\0 & x=2\end{cases}$



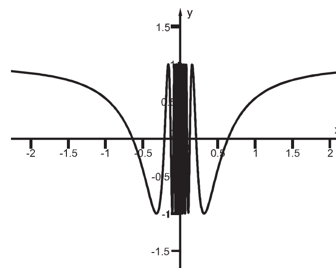
3 $\lim_{x\to5}\frac{|x-5|}{x-5}$



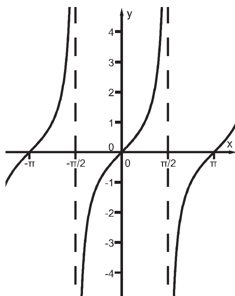
4 $\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}$



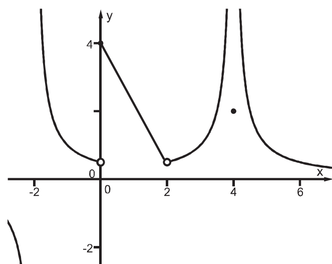
5 $\lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$



6 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$



7 وێنەی ڕوونکردنەوەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ وەڵامدانەوە. ئەگەر ئامانجی هەبێت، بەهایەکی نزیکراوەیی دەستنیشانبکە و ئەگەر نەیبوو هۆیەکەی ڕوونبکەوە.

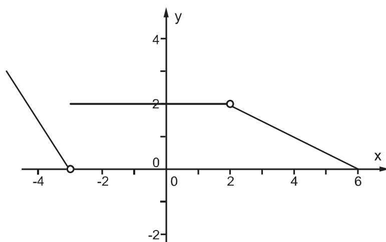


أ $f(-2)$ ب $\lim_{x\to -2} f(x)$

ج $f(0)$ د $\lim_{x\to 0} f(x)$

هـ $f(2)$ و $\lim_{x\to 2} f(x)$

ز $f(4)$ ح $\lim_{x\to 4} f(x)$



8 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی بەهایەکانی c کە وادەکات $\lim_{x\to c} f(x)$ هەبێت.

9 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\begin{cases} x^2 & x \le 2 \\ 8-2x & 2<x<4 \\ 4 & x \ge 4 \end{cases}$ بکێشە وبەکاریبهێنە بۆ دیاریکردنی بەهای c کاتێك $\lim_{x\to c} f(x)$ هەبێت.

10 بەهایە نزیکەکان بۆ $\lim_{x\to 0} f(x)$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ بە هەژمارکردنی بەهایەکانی نەخشەکە کاتێك x بەهایە نزیکەکان لە 0 وەردەگرێت وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی نزیکەیی بۆ نەخشەکە بکێشە.

ڕاست یان هەڵە؟ لە ڕاهێنانەکانی **11** تاکو **14** دیاربکە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە یان هەڵەیە بە دژە نموونەیەك بیسەلمێنە.

11 ئەگەر نەخشەی f پێناسەنەکرابێت لە $x=c$ ئەوا $\lim_{x\to c} f(x)$ بوونی نییە.

12 ئەگەر $f(c)=L$ ئەوا $\lim_{x\to c} f(x)=L$.

13 ئەگەر $\lim_{x\to c} f(x)=L$ ئەوا $f(c)=L$.

14 نەخشەی $f(x)=\sqrt{x}$ بەکاربهێنە.

أ ئایا ڕاستە؟ $\lim_{x\to 0.25}\sqrt{x}=0.5$ ، وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

ب ئایا ڕاستە؟ $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0$، وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

دەربارەی چەمکەکان

15 باسێکی بەپێز بنووسە کە $\lim_{x\to 8} f(x) = 25$ چی دەگەیێنێت.

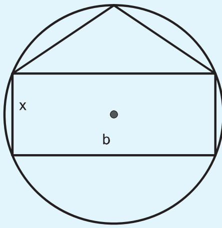
16 ئەگەر $f(2) = 4$ ئایا هیچ دەرئەنجامێکت لەبارەی ئامانجی $f(x)$ دەستدەکەوێت کاتێك x لە 2 نزیکدەبێتەوە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

17 ئەگەر ئامانجی $f(x)$ بکاتە 4 کاتێك x لە 2 نزیکدەبێتەوە، ئایا هیچ دەرئەنجامێکت لەبارەی $f(2)$ دەستدەکەوێت؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

18 3 جۆر لە سیفەتەکانی نەخشە دیاربکە کەدەبنە هۆی نەبوونی ئامانج. وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەیەك بۆ هەر سیفەتێك بکێشە.

بەرەنگاری

19 لەوێنەکە لاکێشەیەك و سێگۆشەیەکی دوولایەکسان دەردەکەوێت کە بە بازنەیەك نیوەتیرەکەی 1 بێت دەورەدراوە. بەهای x چەندە؟ کەوادەکات ڕووبەری لاکێشەکەو سێگۆشەکە یەکسان بن.



3-2

هەژمارکردنی ئامانجەکان

Finding Limits

ئامانجەکان

- بە بەکارهێنانی ڕێسایەکان ئامانجی نەخشە هەژماردەکات.
- ڕێگایەك بۆ هەژمارکردنی ئامانج دەدۆزێتەوە و بەکاریدەهێنێت.
- ئامانجی بڕێك بە نووسینی بە سادەترین شێوە هەژماردەکات.
- بە بەکارهێنانی سەلمێنراوی دوو مەرج ئامانج هەژماردەکات.

هەژمارکردنی ئامانجەکان

لەوانەکەی پێشوو فێربوویت چۆن بە ڕوونکردنەوەیی وژمارەیی بەهای نزیکەیی ئامانجی نەخشەیەك بدۆزییەوە (لەباری هەبوونیدا) لەم وانەیەدا فێردەبیت چۆن ئامانجی نەخشەیەك بە بەکارهێنانی چەند ڕێسایەك وهەندێك لە ئامانجە ناسراوەکان بدۆزیتەوە، هەروەها سەلمێنراوی دوو مەرج فێردەبیت، وچۆن لە هەژمارکردنی ئامانجەکان بەکاریدەهێنیت.

هەندێك لە ڕێساکانی هەژمارکردنی ئامانجەکان

ڕێسای نەخشەی نەگۆڕ: ئەگەر $f(x)=a$ کە a ژمارەیەکی ڕاستی نەگۆڕە ئەوا $\lim_{x\to c} f(x)=a$.

ڕێسای نەخشەی هێڵی بنەڕەتی: ئەگەر $f(x)=x$ ئەوا $\lim_{x\to c} f(x)=c$.

ڕێسای نەخشەی هێز: ئەگەر $f(x)=x^n$ ئەوا $\lim_{x\to c} f(x)=c^n$.

ڕێسای نەخشەی ڕەگی دووجا: ئەگەر $f(x)=\sqrt{x}$ ئەوا $\lim_{x\to c} f(x)=\sqrt{c}$ کاتێك $c>0$.

ڕێسای لێکدان لە ژمارەیەکی نەگۆڕ: ئەگەر $\lim_{x\to c} f(x)$ هەبێت ئەوا $\lim_{x\to c}[af(x)]=a\lim_{x\to c} f(x)$.
کاتێك a ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

ڕێسای سەرجەم: ئەگەر f و g دوو نەخشەبن، و کاتێك a ژمارەیەکی ڕاستی بێت ئەگەر ئامانجی $\lim_{x\to c} f(x)$ و $\lim_{x\to c} g(x)$ هەبێت، ئەوا

$$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to c} f(x)+\lim_{x\to c} g(x)$$

ڕێسای جیاوازی: ئەگەر f و g دوو نەخشەبن، و ئەگەر ئامانجی $\lim_{x\to c} f(x)$ و $\lim_{x\to c} g(x)$ هەبێت، ئەوا

$$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to c} f(x)-\lim_{x\to c} g(x)$$

ڕێسای لێکدان: ئەگەر f و g دوو نەخشەبن، و ئەگەر ئامانجی $\lim_{x\to c} f(x)$ و $\lim_{x\to c} g(x)$ هەبێت، ئەوا

$$\lim_{x\to c}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to c} f(x)\lim_{x\to c} g(x)$$

نموونـــــه 1

ئامانجی نەخشە ڕادەدارەکان

$\lim_{x\to 2} f(x)$ بدۆزەوە کاتێک $f(x)=-2x^5+3x^2-7x+5$

شیکار

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(-2x^5+3x^2-7x+5\right)$$

ڕێسای سەرجەم بەکاربهێنە
$$=\lim_{x\to 2}\left(-2x^5\right)+\lim_{x\to 2}\left(3x^2\right)+\lim_{x\to 2}(-7x)+\lim_{x\to 2}(5)$$

ڕێسای لێکدان لە ژمارە بەکاربهێنە
$$=-2\lim_{x\to 2}\left(x^5\right)+3\lim_{x\to 2}\left(x^2\right)+(-7)\lim_{x\to 2}(x)+\lim_{x\to 2}(5)$$

ڕێسای نەخشەی هێز بەکاربهێنە
$$=-2\times 2^5+3\times 2^2-7\times 2+5=-61$$



.1 $\lim_{x\to 2} f(x)$ بدۆزەوە کاتێک $f(x)=3x^5-2x^3-4x^2-3$

لە ڕێساکانی هەژمارکردنی ئامانجەکان

ڕێسای ئامانجی نەخشەی ڕادەدار: ئەگەر $f(x)$ نەخشەیەکی ڕادەداربێت ئەوا $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$

ڕێسای دابەش: ئەگەر f و g دوو نەخشەبن، ئەگەر ئامانجی $\lim_{x\to c} f(x)$ و $\lim_{x\to c} g(x)$ هەبێت، ئەوا کاتێک $\lim_{x\to c} g(x)\neq 0$

ئەوا: $$\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$$

نموونـــــه 2

ئامانجی نەخشەی ڕێژەیی

$\lim_{x\to 2} f(x)$ بدۆزەوە کاتێک $f(x)=\frac{x^2-1}{x-3}$ نەخشەیەکی ڕێژەییە.

شیکار

بە بەکارهێنانی ڕێسای دابەش دەتوانیت بنووسیت.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-3}=\frac{\lim_{x\to 2}\left(x^2-1\right)}{\lim_{x\to 2}(x-3)}=\frac{2^2-1}{2-3}=-3$$



.2 $\lim_{x\to 2} f(x)$ **بدۆزەوە کاتێک** $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ **نەخشەیەکی ڕێژەییە.**

لەکاتی دۆزینەوەی ئامانجێکی دیاریکراو خۆت بەرامبەر بارێکی نادیاری $\frac{0}{0}$ دەبینیەوە زۆرجار ئەمە لە دۆزینەوەی نەخشە ڕێژەییەکان ڕوودەدات. لە نموونەی دێت دەبینیت چۆن نادیاری بە ڕێگای جەبری لادەبەیت وئامانج دەدۆزیتەوە، لەبەشەکانی داهاتوو بۆ ئەم پرسیارە دەگەڕێینەوە تارێگایەکی کارا بۆ شیکارکردنی ئەم جۆرە پرسیارانە فێربیت.

نموونـــــه 3

باری نادیار

$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$ بدۆزەوە.

شیکار

جێبەجێکردنی ڕێسای نەخشەی ڕێژەیی دەبێتە بارێك لەبارەکانی نادیار.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{\lim_{x\to1}x^2-1}{\lim_{x\to1}x-1}=\frac{0}{0}$$

بۆ لادانی نادیارەکە $x+1=\frac{x^2-1}{x-1}$ بەکاربهێنە کاتێك $x\neq1$ لەمەش دەردەچێت.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$



3. $\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ بدۆزەوە.

نموونـــــه 4

باری نادیار

$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ بدۆزەوە.

شیکار

جێبەجێکردنی ڕێسای نەخشەی ڕێژەیی دەبێتە بارێك لەبارەکانی نادیار.

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\frac{\lim_{x\to3}\sqrt{x+6}-3}{\lim_{x\to3}x-3}=\frac{0}{0}$$

بۆ لادانی نادیار سەرەو ژێرە لە ئاوەڵی $\sqrt{x+6}+3$ بدە، ئەمەت دەستدەکەوێت.

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to3}\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\frac{1}{6}$$



4. $\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ بدۆزەوە.

لە ڕێساکانی هەژمارکردنی ئامانجەکان

ڕێسای ئامانجی نەخشەی ئاوێتە: ئەگەر f و g دوو نەخشەبن، ئەگەر ئامانجی $\lim_{x\to c}g(x)=L$ و $\lim_{x\to L}f(x)$ هەبێت، ئەوا

$$\lim_{x\to c}\left[f(g(x))\right]=f\left(\lim_{x\to c}g(x)\right)=f(L)$$

نموونــــه 5

ئامانجی نەخشەی ئاوێتە

$\lim_{x\to 2} f(x)$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=\sqrt{x^2+4}$.

شیکار

$f(x)$ نەخشەیەکی ئاوێتەیە لە دوو نەخشەی $u(x)=\sqrt{x}$ و $v(x)=x^2+4$ پێکهاتووە،

واتە $f(x)=\sqrt{x^2+4}=\sqrt{v(x)}=u(v(x))$.

لەمەش دەردەچێت $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} u(v(x))$ بەلام $\lim_{x\to 2} v(x)=v(2)=8$

لەمەش دەردەچێت $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 8}\sqrt{x}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.



5. $\lim_{x\to 2} f(x)$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=\sqrt{x^3-4}$.

لە ڕێساکانی هەژمارکردنی ئامانجەکان

ڕێسای نەخشە سێگۆشەییەکان

$\lim_{x\to c} \sin x = \sin c$ $\quad \lim_{x\to c} \cos x = \cos c$ $\quad \lim_{x\to c} \tan x = \tan c \quad c\neq \frac{\pi}{2}+k\pi$

نموونــــه 6

ئامانجی نەخشەیەك کەنەخشەی سێگۆشەی لەخۆدەگرێت

$\lim_{x\to \pi} f(x)$ بدۆزەوە کە $f(x)=x\cos x$

شیکار

$$\lim_{x\to \pi} f(x)=\lim_{x\to \pi}(x\cos x)=\lim_{x\to \pi}(x)\lim_{x\to \pi}(\cos x)=\pi\cos\pi=-\pi$$



6. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x)$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=x\sin x$

لە ڕێساکانی هەژمارکردنی ئامانجەکان

ڕێسای نەخشەی توانی سروشتی $\lim_{x\to c} e^x = e^c$

ڕێسای نەخشەی لۆگاریتمی سروشتی؛ $\lim_{x\to c} \ln x = \ln c \quad c>0$

نموونــــه 7

ئامانجی نەخشەی توانی

$\lim_{x\to \pi} f(x)$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=3e^{\sin x}$

شیکار

$$\lim_{x\to \pi} f(x)=\lim_{x\to \pi}\left(3e^{\sin x}\right)=\lim_{x\to \pi}(3)\lim_{x\to \pi}\left(e^{\sin x}\right)=3e^{\lim_{x\to \pi}\sin x}=3e^{\sin\pi}=3e^0=3$$



7. $\lim_{x\to0} f(x)$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=3ln(x+1)$.

لەوانەیە لە هەندێك باردا ئاسان نەبێت، ئامانجی نەخشەیەك ڕاستەوخۆ بدۆزیتەوە، سەلمێنراوی دوو مەرج لەم بارانە یارمەتیت دەدات بۆ دۆزینەوەی ئامانجی داواکراو.

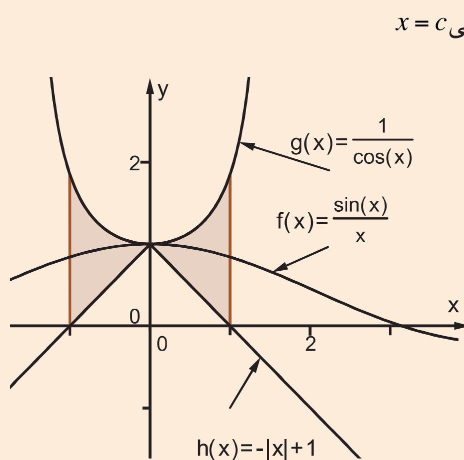
سەلمێنراوی 2–1 سەلمێنراوی هەردوولەت (الشطرين = السندويج)

ئەگەر $h(x)\le f(x)\le g(x)$ بەهای x لە هاوسێیەکانی $x=c$ هەرچەندبێت جگە لە $x=c$ وئەگەر

$$\lim_{x\to c} h(x)=L=\lim_{x\to c} g(x)$$

ئەوا ئامانجی $\lim_{x\to c} f(x)$ بوونی هەیە

وە $\lim_{x\to c} f(x)=L$.



سەلمێنراوی هەردوولەت بۆ دۆزینەوەی هەندێك ئامانجی گرنگ یارمەتیت دەدات وەك ئەو دوو ئامانجەی خوارەوە.

هەندێك ئامانجی سێگۆشەیی

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0 \qquad \lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$$

نموونە 8 بەکارهێنانی سەلمێنراوی هەردوولەت

$\lim_{x\to0} x\cos\frac{1}{x}$ بدۆزەوە.

شیکار

بەپشت بەستن بە لاسەنگەی دوانی $-1\le\cos\frac{1}{x}\le1$ دەتوانیت ئەمە بنووسیت $-x\le x\cos\frac{1}{x}\le x$

ئەگەر $x\ge0$ وە ئەمە بنووسیت $-x\ge x\cos\frac{1}{x}\ge x$ ئەگەر $x<0$.

دەتوانیت سەلمێنراوی دوو مەرج ولاسەنگەی $-x\le x\cos\frac{1}{x}\le x$ بەکاربهێنێت بۆ ئەوەی بگەیتە ئەوەی کە $x\cos\frac{1}{x}$ لە 0 نزیکدەبێتەوە کاتێك x لەلای ڕاست لە 0 نزیکدەبێتەوە هەروەها دەتوانیت سەلمێنراوی دوو مەرج ولاسەنگەی $-x\ge x\cos\frac{1}{x}\ge x$ بەکاربهێنێت بۆ ئەوەی بگەیتە ئەوەی کە $x\cos\frac{1}{x}$ لە 0 نزیکدەبێتەوە کاتێك x لەلای چەپ لە 0 نزیکدەبێتەوە، ئەمەش ئەوە دەسەلمێنێت کە $\lim_{x\to0} x\cos\frac{1}{x}=0$.



8. $\lim_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}$ بدۆزەوە.

3-2 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تا 3 ئامانجی داواکراو بدۆزەوە.

1 $\lim_{x\to 1}\left(3x^3-2x^2+4\right)$ **2** $\lim_{x\to 3}\frac{2}{x+2}$ **3** $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}}{x-4}$

لە ڕاهێنانی 4 و 5 دا ئەمانە بدۆزەوە.

4 $g(x)=x^3$: $f(x)=5-x$ بدۆزەوە. أ $\lim_{x\to 1}f(x)$ ب $\lim_{x\to 4}g(x)$ ج $\lim_{x\to 1}g(f(x))$

5 $g(x)=\sqrt[3]{x+6}$: $f(x)=2x^2-3x+1$ بدۆزەوە. أ $\lim_{x\to 4}f(x)$ ب $\lim_{x\to 21}g(x)$ ج $\lim_{x\to 4}g(f(x))$

لە ڕاهێنانی 6 تا 9 ئامانجی داواکراو بدۆزەوە.

6 $\lim_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{2}$ **7** $\lim_{x\to \pi}\cos 3x$ **8** $\lim_{x\to 3}\tan\frac{\pi x}{4}$ **9** $\lim_{x\to 6}\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{6}}$

لە ڕاهێنانی 10 و 11 دا زانیارییە دەستکەوتووەکان بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی ئامانجە داواکراوەکە.

10 $\lim_{x\to c}g(x)=3$: $\lim_{x\to c}f(x)=2$

أ $\lim_{x\to c}[5g(x)]$ ب $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]$ ج $\lim_{x\to c}[f(x)g(x)]$ د $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$

11 $\lim_{x\to c}f(x)=27$

أ $\lim_{x\to c}\sqrt[3]{f(x)}$ ب $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{18}$ ج $\lim_{x\to c}[f(x)]^2$ د $\lim_{x\to c}[f(x)]^{\frac{2}{3}}$

لە ڕاهێنانی 12 تا 20 ئامانجی داواکراو بدۆزەوە.

12 $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}$ **13** $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-8}$ **14** $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

15 $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+4}-\frac{1}{4}}{x}$ **16** $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$ **17** $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$

18 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}$ **19** $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ **20** $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3+x}-\frac{1}{3}}{x}$

لە ڕاهێنانی 21 تا 26 ئامانجی داواکراو بدۆزەوە.

21 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{5x}$ **22** $\lim_{x\to 0}\frac{3(1-\cos x)}{x}$ **23** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\tan x}{x}$

24 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$ **25** $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x}$ **26** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ (یارمەتی : بنووسە $\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{2\sin 2x}{2x}\times\frac{3x}{3\sin 3x}$)

لە دوو ڕاهێنانی 27 و 28 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ بدۆزەوە.

27 $f(x)=\sqrt{x}$

28 $f(x)=\frac{4}{x}$

لە دوو ڕاهێنانی 29 و 30 سەلمێنراوی دوو مەرج بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی $\lim_{x\to c} f(x)$.

29 $4-x^2 \le f(x) \le 4+x^2$ ، $c=0$

30 $b-|x-a| \le f(x) \le b+|x-a|$ ، $c=a$

دەربارەی چەمکەکان

31 ڕوونیبکەوە دەستەواژەی «دوو نەخشە هاوویێنەن جگە لە خاڵێکدا» چی دەگەیێنێت.

32 نموونەیەك لەسەر (دوو نەخشەی هاوویێنە جگە لە خاڵێکدا) بهێنەوە.

33 سەلمێنراوی دوو مەرج بەشێوازی خۆت ڕوونبکەوە.

لە دوو ڕاهێنانی 34 و 35 نەخشەی لادانی $s(t)=-4.9t^2+150$ بەکاربهێنە کە شوێنی کەوتنی بەردێك لەبەرزی 150 m پاش t چرکە دیاریدەکات، ئەو ئامانجە $\lim_{t\to a}\frac{s(a)-s(t)}{a-t}$ خێرایی تەنە کەوتووەکە دەردەبڕێت لە $t=a$.

34 خێرایی بەردەکە لە $t=5$ بدۆزەوە.

35 خێرایی بەردەکە لەکاتی بەرکەوتنی بەزەوی چەندە؟

36 دوو نەخشەی f و g کە ئەمانە جێبەجێدەکەن بدۆزەوە: ئامانجی $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{x\to 0} g(x)$ بوونی نییە لە کاتێکدا ئامانجی $\lim_{x\to 0}[f(x)+g(x)]$ بوونی هەیە.

37 f و g ئەمانە جێبەجێدەکەن: $\lim_{x\to c} f(x)=0$ و $|g(x)|\le M$ بەهای x هەرچەند بێت جگە لە $x=c$ کاتێك M ژمارەیەکی موجەبی نەگۆڕبێت، بسەلمێنە $\lim_{x\to c} f(x)g(x)=0$

ڕاست یان هەڵە؟ لە ڕاهێنانی 38 تاکو 41 د یاریکە کە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە یان هەڵەیە ئەوا بەدژە نموونەیەك بیسەلمێنە یان لێکیبدەوە.

38 $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=1$

39 $\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x}=1$

40 ئەگەر $f(x)=g(x)$ بەهای x هەرچەندبێت جگە لە $x=0$ و ئەگەر $\lim_{x\to 0} f(x)=L$ ئەوا $\lim_{x\to 0} g(x)=L$

41 $\lim_{x\to 2} f(x)=3$ کاتێك $f(x)=\begin{cases}3 & x\le 2\\ 0 & x>2\end{cases}$

بەشی 2

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

لاری لێکەوت

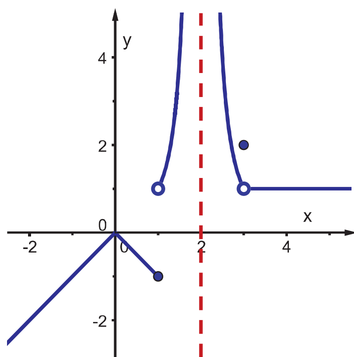
1 نەخشەی $f(x)=1-\frac{4}{x}$ وخاڵی $A(1,-3)$ کە دەکەوێتە سەر وێنە ڕوونکردنەوەکەی بەکاربهێنە.

أ وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە و بڕەرەکانی d_1 و d_2 و d_3 بکێشە، کە بەخاڵی A و خاڵەکانی $Q\ (x, f\ (x))$ دا دەڕوات کاتێك x بەهایەکانی 3 ، 2، 1.5 یەك لەدوای یەك وەردەگرێت.

ب لاری هەریەك لە بڕەرەکان بدۆزەوە.

ج ڕوونیبکەوە ئەو کردارەی لە لقی ب ئەنجامتدا چۆن یارمەتیت دەدات بۆ دۆزینەوەی بەهای لاری لێکەوتی ڕوونکردنەوەکە لەخاڵی A.

2 لەوێنەی بەرامبەر وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ دەردەکەوێت، وێنەکە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای هەریەك لە $f(1)$ و $f(2)$ و $f(3)$ و $\lim_{x\to0} f(x)$ و $\lim_{x\to1} f(x)$ و $\lim_{x\to2} f(x)$ و $\lim_{x\to3} f(x)$.



هەژمارکردنی ئامانجەکان

لە ڕاهێنانی 3 تاکو 8 ئامانجی داواکراو بدۆزەوە.

3 $\lim_{x\to1} 2x^3-5x+2$

4 $\lim_{x\to-1} 5x^2+e^{2x}$

5 $\lim_{x\to1} \frac{x^2-2x+1}{|x-1|}$

6 $\lim_{x\to2} \frac{2x^2-8}{2-x}$

7 $\lim_{x\to-1} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}}{x+1}$

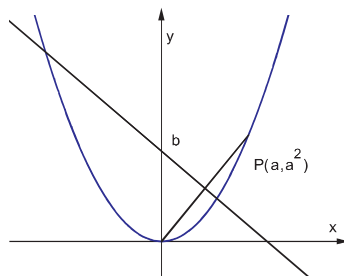
8 $\lim_{x\to0} \frac{3x-\sin 2x}{2x-\sin 3x}$

سەلمێنراوی دوو مەرج

9 سەلمێنراوی دوو مەرج بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی $\lim_{x\to0} |x| \sin\frac{1}{x^2}$.

کەوتنی سەربەست

10 نەخشەی $d(t)=-4.9t^2+60$ نموونەیەکە بۆ دیاریکردنی شوێنی کەوتنی بەردێك لە بەرزی 60 مەتر پاش t چرکە لەکەوتنی. ئەم ئامانجە $\lim_{t\to a}\frac{d(t)-d(a)}{t-a}$ خێرایی بەردەکە لە $t=a$ دەردەبڕێت.



أ خێرایی بەردەکە پاش یەك چرکە لەکەوتنی بدۆزەوە.

ب خێرایی بەردەکە لەکاتی بەرکەوتنی بەزەویدا بدۆزەوە.

11 $P\left(a, a^2\right)$، $a>0$ خاڵێکە لەسەر وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی برگە هاوتای $f(x)=x^2$ ئەگەر b یەکتربڕینی ئەستوونی بێت بۆ تەوەری ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی خاڵی P بەخاڵی بنەڕەت دەگەیەنێت، ئەوا ئامانجی b کاتێك P لەخاڵی بنەڕەت نزیکدەبێتەوە بدۆزەوە.

4-2

نەخشە بەردەوامەکان

Continuous Functions

دۆزینەوە

ئەگەر توانیت ڕوونکردنەوەی نەخشەیەك بکێشیت بێ ئەوەی قەڵەمەکەت لەسەر کاغەز هەڵبگریت، هەست بە بەردەوامی نەخشەکە دەکەیت. ڕوونکردنەوەی ئەو نەخشانەی دێن بکێشە دیاریبکە ئایا هەریەکەیان بەردەوامە یان نا.

1. $f(x)=x+1$ 2. $f(x)=\frac{1}{x-2}$ 3. $f(x)=\begin{cases}2x-4 & x\le 0\\ x+1 & x>0\end{cases}$

ئامانجەکان

- بەردەوامی نەخشە لە خاڵێك دەناسێت.
- بەوێنەی ڕوونکردنەوەیی بەردەوامی نەخشە دیاردەکات.
- لە سەلمێنراوی نێوانە بەهایەکان تێدەگات و بەکاردێنێت.

زاراوەکان
Vocabulary

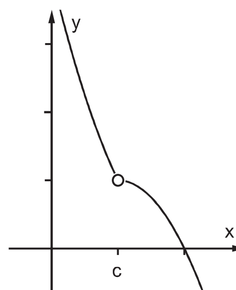
نەخشەی بەردەوام
Continuous Function

نەخشەی پچراو
Discontinuous Function

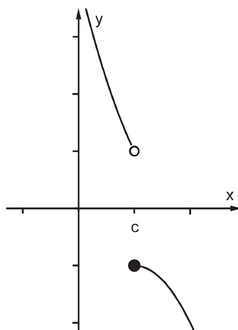
پچڕانێك لابردنی لەتوانادایە
Removable Discontinuity

بەردەوامی نەخشە لە خاڵێکدا

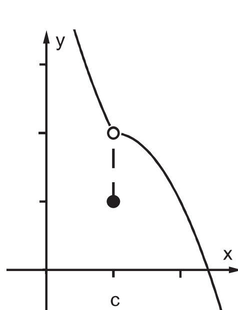
واتای وشەی بەردەوامی لەبیرکاری لەگەڵ واتاکەی لەژیانی ڕۆژانەدا دەگونجێت، بە نەخشەی f دەوترێت بەردەوامە لە خاڵی $x=c$ ئەگەر ڕوونکردنەوەکەی بێ پچڕان بێت بەهۆی کەلێنێك یان دوورکەوتنەوەیەك، لەم سێ وێنەی خوارەوە سێ بار ڕوونکراوەتەوە نەخشەکان تێیدا لەخاڵی c بەردەوام نین لەکاتێکدا لەهەموو خاڵەکانی تر بەردەوامە.



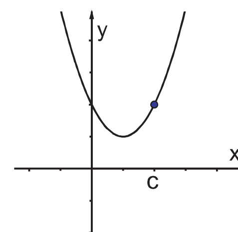
نەخشەکە پێناسەنەکراوە لە $x=c$



نەخشەکە ئامانجی نییە کاتێك x نزیکدەبێتەوە لە c



$\lim_{x\to c} f(x)\ne f(c)$



سێ مەرج وادەکات نەخشەکە لە $x=c$ بەردەوام نەبێت

لە وێنەکانی سەرەوە دەردەکەوێت کە یەکێك لەم مەرجانەی خوارەوە وادەکات نەخشەکە لە $x=c$ بەردەوام نەبێت.

1. ئەگەر نەخشەکە لە $x=c$ پێناسەنەکرابێت.

2. ئەگەر نەخشەکە ئامانجی نەبێت کاتێك x لە c نزیکدەبێتەوە.

3. ئەگەر نەخشەکە ئامانجی هەبێت کاتێك x نزیکدەبێتەوە لە c ، بەڵام ئامانجەکە یەکسان نەبێت بە $f(c)$.

لەژێر ڕۆشنایی ئەم مەرجانە دەتوانین پێناسەی بەردەوامی نەخشە لەخاڵی $x=c$ دا بکەین.

پێناسەی بەردەوامی

نەخشەی f لەخاڵی $x = c$ بەردەوام دەبێت ئەگەر ئەم سێ مەرجەی خوارەوە هاتەدی.

.1 نەخشەکە لە $x = c$ پێناسەکرابێت.

.2 ئامانجی $\lim_{x\to c} f(x)$ هەبێت.

.3 $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

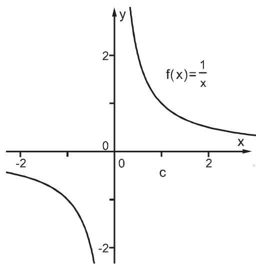
بە نەخشەیەك دەوترێت پچڕاو لەخاڵی $x = c$ ئەگەر لەم خاڵەدا بەردەوام نەبێت، لە هەندێك باردا دەتوانیت نەخشەی پچڕاو لەخاڵی $x = c$ پێناسەبکێتەوە و پچڕانەکەی لەو خاڵەدا نەهێڵیت، لەم بارەدا بەو پچڕانە دەوترێت لابردنی لە توانادایە، لەکاتێکدا لەبارەکانی تر لابردنی لەتوانادا نابێت.

نموونــــە 1 بەردەوامی نەخشە

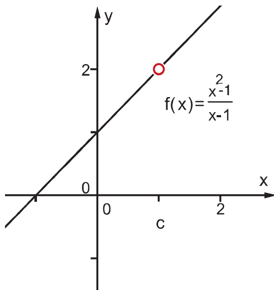
بەردەوامی هەر نەخشەیەك تاوتوێبکە وخاڵەکانی پچڕانیان دیاربکە ئەگەر هەبوو.

أ $f(x) = \frac{1}{x}$ **ب** $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ **ج** $h(x) = \begin{cases} x+1 & x \le 0 \\ x^2+1 & x > 0 \end{cases}$ **د** $k(x) = \sin x$

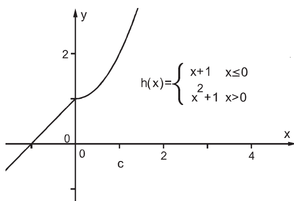
شیکار



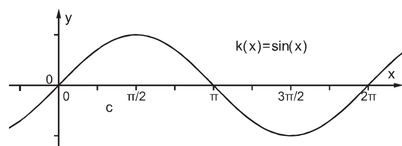
أ بواری نەخشەکە لەهەموو ژمارەکان جگە لە 0 پێکدێت، لەمەش دەردەچێت نەخشەکە لە خاڵی $x = 0$ پێناسەنەکراوە، ئەمەش وا دەکات لەو خاڵە بەردەوام نەبێت، لەلایەکی تر پچڕانی نەخشەکە لەو خاڵەدا لابردنی لەتوانادا نییە، چونکە ناتوانیت پێناسەی $f(0)$ بکەیت بۆ ئەوەی نەخشەکە لە $x = 0$ بەردەوام بێت.



ب بواری نەخشەکە لەهەموو ژمارەکان جگە لە 1 پێکدێت، لەمەش دەردەچێت کە نەخشەکە لە خاڵی $x = 1$ پێناسەنەکراوە، ئەمەش وادەکات بەردەوام نەبێت. لەلایەکی تر پچڕانی نەخشەکە لەو خاڵەدا لابردنی لەتوانادایە، چونکە نەخشەکە بۆ نەخشەی g دەگۆڕێت کە لە $x = 1$ بەردەوامە، ئەگەر پێناسەی g بکەیت وەك ئەوەی دێت $g(1) = 2$ و $g(x) = f(x)$ کە $x \neq 1$.



ج بواری نەخشەکە لە هەموو ژمارە ڕاستییەکان پێکدێت، دیارە نەخشەکە لەهەر خاڵێکی $x = c$ بەردەوامە کە $c \neq 0$، لەبارەی خاڵی $x = 0$ نەخشەکە تێیدا بەردەوامە، چونکە نەخشەکە لە $x = 0$ پێناسەکراوە لەلایەك و لەبەرئەوەی ئامانجەکەی دەکاتە 1 کاتێك x لە c نزیکدەبێتەوە لەلای ڕاست یان لای چەپ. لەلایەکی تر و لەبەرئەوەی $\lim_{x\to 0} h(x) = 1 = h(0)$ لەلای سێیەم.



د بواری نەخشەکە لەهەموو ژمارە ڕاستییەکان پێکدێت، دیارە کە نەخشەکە لەهەر خاڵێکی $x = c$ لە خاڵەکانی بوارەکەیدا بەردەوامە ئەمەش وادەکات نەخشەکە بەردەوام بێت.



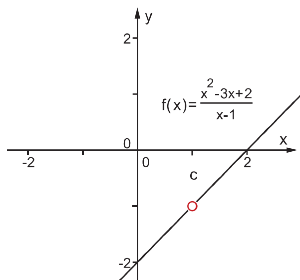
1. بەردەوامی هەر نەخشەیەك تاوتوێبکە.

أ $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ج $h(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \le 0 \\ -x+1 & x > 0 \end{cases}$

ب $g(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$ د $k(x) = \cos x$

نموونــــە 2 لابردنی پچڕانی نەخشە لە خاڵێك

ئایا نەخشەی $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$ لە خاڵی $x = 1$ بەردەوامە؟ ڕوونکردنەوەکەی بکێشە و وەڵامەکەت ڕوونبکەوە، ئەگەر نەخشەکە پچڕاو بوو لەو خاڵەدا، دیاریبکە، ئەگەر پچڕانەکەی لابردنی لەتوانادایە، لەو بارەدا ڕوونیبکەوە چۆن بە پێناسەکردنەوەی نەخشەکە پچڕانەکەی لادەبەیت.



شیکار

نەخشەکە لە خاڵی $x = 1$ پچڕاوە چونکە لەو خاڵەدا پێناسەنەکراوە، ڕوونکردنەوەکەش ئەوە دەردەخات بەڵام ئەو پچڕانە لابردنی لەتوانادایە، چونکە $f(x)$ لە -1 نزیکدەبێتەوە کاتێك x لەلای ڕاست و لەلای چەپ لە 1 نزیکدەبێتەوە، بۆیە دەتوانرێت بنووسرێت.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -1$$

بۆ لابردنی پچڕانی نەخشەی f لە خاڵی $x = 1$ دووبارە پێناسەی بکەوە بەم شێوەی خوارەوە.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-1} & x \ne 1 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$$



2. ئایا نەخشەی $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x+2}$ لە خاڵی $x = -2$ بەردەوامە؟ ڕوونکردنەوەکەی بکێشە و وەڵامەکەت ڕوونبکەوە ئەگەر نەخشەکە لەو خاڵەدا پچڕاوبوو، دیاریبکە کە ئەگەر پچڕانەکەی لابردنی لەتوانادایە لەو بارەدا ڕوونیبکەوە چۆن بە پێناسەکردنەوەی نەخشەکە بچڕانەکەی لادەبەیت.

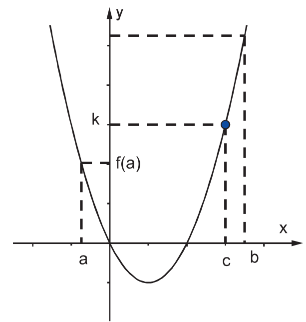
سەلمێنراوی نێوانە بەهایەکان Intermediate Value Theorem

ئەگەر لە گۆڕانی درێژی مرۆڤ بەگۆڕانی تەمەنی وردبییەوە، ئەوا دەبینین کە درێژی مرۆڤ لە ڕاستییدا نەخشەیە بەپێی تەمەنەکەی. هەروەها تێبینی ئەوەش دەکەیت ئەگەر درێژی کەسێك 150 cm بێت لە تەمەنی دوازدەساڵیدا، 169 cm بێت لە تەمەنی بیست ساڵیدا، ئەوا درێژییەکەی هەموو ئەو بەهایانەی کە دەکەوێتە نێوان 150 و 169 بەدرێژی ڕۆژەکان وەرگرتووە. هەروەها تێبینی دەکەیت درێژی ئەو کەسە لە 150 cm بۆ 169 cm بەشێوەیەکی بەردەوام زیادیکردوە و درێژییەکەی هیچ پازدانێکی نەکردوە.

لەم تێبینیانەوە دەتوانین بڵێین کە درێژی ئەو کەسە نەخشەیەکی بەردەوامە کاتێك تەمەنەکە بەهایەکانی نێوان 12 و 20 وەردەگرێت و ئەو نەخشەیە هەموو بەهایەکانی نێوان 150 بۆ 169 وەردەگرێت، نەخشە بەردەوامەکانیش هەمان سیفەتیان هەیە، سەلمێنراوی نێوانە بەهایەکان ئەوە دوویاتدەکاتەوە.

سەلمێنراوی 2-2 **نێوانە بەهایەکان**

ئەگەر نەخشەی f لەنێوان خاڵەکانی $x=a$ و $x=b$ بەردەوام بێت، ئەوا هەموو بەهایەکانی نێوان $f(a)$ و $f(b)$ وەردەگرێت، بە دەستەواژەیەکی وردتر ئەگەر k ژمارەیەکی ڕاستی بێت و بکەوێتە نێوان $f(a)$ و $f(b)$ دەتوانین ژمارەی c لە نێوان a و b بدۆزینەوە کە $f(c)=k$ پاسادان دەکات.



ڕەگەکانی هاوکێشەی $f(x)=0$

لە گرنگترین جێبەجێکردنەکانی سەلمێنراوی نێوانە بەهایەکان سەلماندنی ئەوەی کە هاوکێشەی $f(x)=0$ ڕەگێکی هەیە دەکەوێتە نێوان دوو ژمارە، ئەگەر نەخشەی f بەردەوام بێت لەنێوان $x=a$ و $x=b$ و ئەگەر $f(a)$ و $f(b)$ نیشانەیان جیاواز بێت، ئەوا هاوکێشەی $f(x)=0$ بەلایەنی کەم ڕەگێکی هەیە دەکەوێتە نێوان a و b.

لەبەرئەوەی $f(a)$ و $f(b)$ نیشانەیان جیاوازە ئەوا 0 دەبێتە نێوانە بەهای نێوان $f(a)$ و $f(b)$، بەپشت بەستن بە سەلمێنراوی نێوانە بەهایەکان ژمارەیەکی ڕاستی c هەیە دەکەوێتە نێوان a و b کە $f(c)=0$ پاسادان دەکات.

نموونە 3 جێبەجێکردن لەسەر سەلمێنراوی نێوانە بەهایەکان

سەلمێنراوی نێوانە بەهایەکان بەکاربهێنە بۆ ئەوەی بسەلمێنیت کە هاوکێشەی $f(x)=0$ کاتێك $f(x)=x^3+2x-1$ ڕەگێکی لەنێوان 0 و 1 دا هەیە.

شیکار

نەخشەی f نەخشەیەکی ڕادەدارە، هەروەها بەردەوامە لەنێوان $x=0$ و $x=1$.

لەلایەکی تر:

$$f(0)=0^3+2(0)-1=-1$$

$$f(1)=1^3+2(1)-1=2$$

لەبەرئەوەی $f(0)<0$ و $f(1)>0$ بەدوو نیشانەی جیاوازن ئەوا هاوکێشەی $f(x)=0$ ڕەگێکی لەنێوان 0 و 1 دا هەیە.

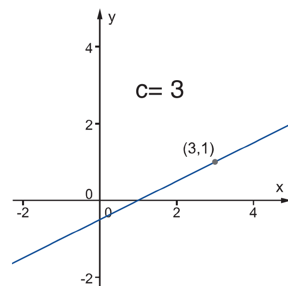


3. سەلمێنراوی نێوانە بەهایەکان بەکاربهێنە بۆ ئەوەی بسەلمێنیت کە هاوکێشەی $f(x)=0$ کاتێك $f(x)=x^4+2x^2-1$ ڕەگێکی لە نێوان 0 و 1 دا هەیە.

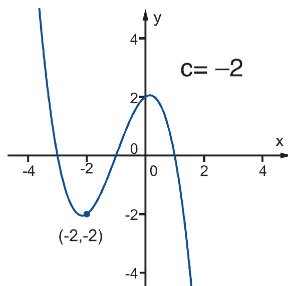
4-2 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تا 6 وێنە ڕوونکردنەوەکە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ئامانجی نەخشەکە کاتێک x لەلای ڕاست و لەلای چەپ لە c نزیکدەبێتەوە، $\lim_{x\to c} f(x)$ بدۆزەوە (ئەگەر هەبوو) پاشان بەردەوامی نەخشەکە لە $x=c$ تاوتوێبکە.

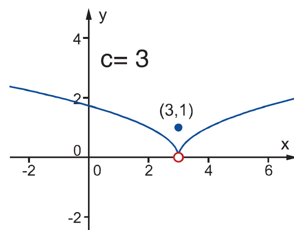
1



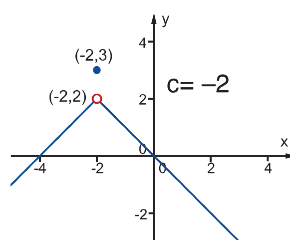
2



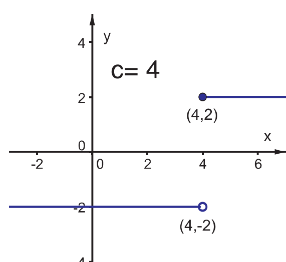
3



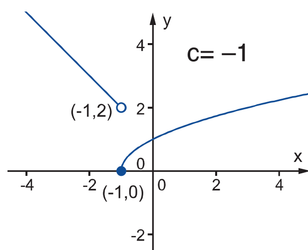
4



5

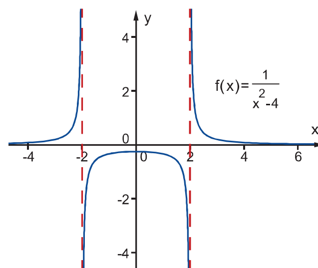


6

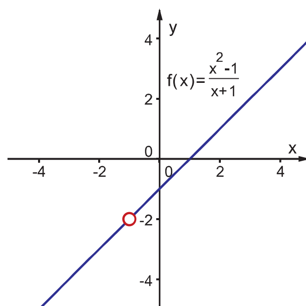


لە ڕاهێنانی 7 تاکو 9 بەردەوامی نەخشەکە تاوتوێبکە.

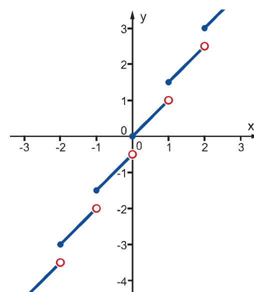
7 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$



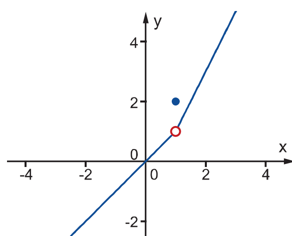
8 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$



9 $f(x)=\frac{1}{2}[x]+x$ کە $[x]$ گەورەترین ژمارەی تەواو لە x زیاترنەبێت دەنوێنێت.



10 $f(x)=\begin{cases} x & x<1 \\ 2 & x=1 \\ 2x-1 & x>1 \end{cases}$



لە ڕاهێنانی 11 تا 16 بەهایەکانی x کە نەخشەکە تێیدا پچڕاوە ئەگەر هەبوو بدۆزەوە، ودیاریبکە ئەگەر پچڕانەکە لابردنی لەتواناندا هەیە.

11 $f(x)=x^2-2x+1$

12 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

13 $f(x)=\frac{x}{x^2-x}$

14 $f(x)=\frac{x}{x-1}$

15 $f(x)=\frac{|x-3|}{x-3}$

16 $f(x)=\begin{cases}-2x+3 & x<1\\ x & x\geq 1\end{cases}$

لە ڕاهێنانی 17 تا 18 بەهای a یان بەهای a و b دیاریبکە تا نەخشەکە خاڵی پچڕانی نەبێت.

17 $f(x)=\begin{cases}x^3 & x\leq 2\\ ax^2 & x>2\end{cases}$

18 $f(x)=\begin{cases}2 & x\leq -1\\ ax+b & -1<x<3\\ -2 & x\geq 3\end{cases}$

دەربارەی چەمکەکان

19 جیاوازی نێوان پچڕانێك لابردنی لەتواناندا بێت یەکێکی تر لابردنی لەتواناندا نەبێت ڕوونبکەوە لەکاتی باسکردنی جیاوازییەکە نموونە بهێنەوە بۆ.

أ نەخشەیەکی پچڕاو لە $x=2$ وپچڕانەکەی لابردنی لەتواناندا نەبێت.

ب نەخشەیەکی پچڕاو لە $x=-2$ وپچڕانەکەی لابردنی لەتواناندا هەبێت.

ج نەخشەیەك هەردوو مەرجەکەی پێشووی پێکەوە تێدابێت.

ڕاستە یان هەڵە؟ لە ڕاهێنانی 20 تا 23 دیاربکە کە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە یان هەڵەیە ئەوا بەدژە نموونەیەك بیسەلمێنە.

20 ئەگەر $\lim_{x\to c} f(x)=L$ و $f(c)=L$ ئەوا نەخشەی f لە $x=c$ بەردەوامە.

21 ئەگەر $f(x)=g(x)$ کاتێك $x\neq c$ و $f(c)\neq g(c)$ ئەوا یەکێك لە دوو نەخشەکە لە $x=c$ پچڕاوە.

22 دەکرێ لە نەخشەیەکی ڕێژەیی ژمارەیەکی ناکۆتا خاڵی پچڕانی هەبێت.

23 نەخشەی $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$ بەردەوامە و خاڵی پچڕانی نییە.

24 نەخشەی هێما (الأشارة) بریتییە لە نەخشەی

$$s(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

25 ڕوونکردنەوەی نەخشەی s بکێشەو ئەو ئامانجانەی دێن بدۆزەوە ئەگەر.

أ $\lim_{x\to 0^-} s(x)$ ب $\lim_{x\to 0^+} s(x)$ ج $\lim_{x\to 0} s(x)$

5-2

ئامانجە بێپایانەکان
Infinite limits

ئامانجەکان

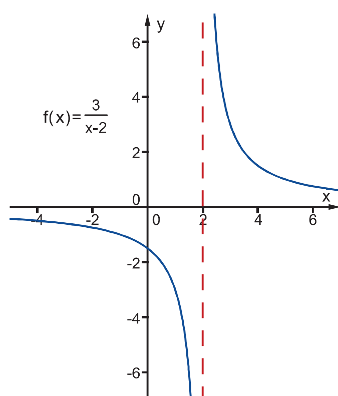
- ئامانجە بێپایانەکان لە لای ڕاست ولەلای چەپ دەدۆزێتەوە.
- دەرکەنارە ستوونییەکان بۆ نەخشەکان دەدۆزێتەوە و وێنەکانیان دەکێشێت.

زاراوەکان
Vocabulary

ئامانجی بێپایان
Infinite Limit

دەرکەناری ستوونی
Vertical Asymtote

ئامانجە بێپایانەکان



لەوێنەی بەرامبەر وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{3}{x-2}$ دەردەکەوێت. دەتوانیت ئەو وێنە ڕوونکردنەوەیە و خشتەکەی خوارەوە بەکاربهێنیت بۆ ئەوەی ببینیت کە بەهایەکانی $f(x)$ بێسنور کەمدەکات کاتێک x زیاتر وزیاتر لەلای چەپ لە 2 نزیکدەبێتەوە، ئەمە بەم شێوەیە دەردەبڕین $f(x)$ لە $-\infty$ نزیکدەبێتەوە کاتێک x لەلای چەپ لە 2 نزیکدەبێتەوە وبەم شێوەیە دەنووسرێت. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ هەروەها بەهایەکانی $f(x)$ بێسنوور زیاد دەکات کاتێک x زیاتر و زیاتر لەلای ڕاست لە 2 نزیکدەبێتەوە ئەمەش بەم شێوەیە دەردەبڕین، $f(x)$ لە $+\infty$ نزیکدەبێتەوە کاتێک x لەلای ڕاست لە 2 نزیکدەبێتەوە. وبەم شێوەیە دەنووسرێت.

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

x لەلای چەپ لە 2 نزیکدەبێتەوە ← → x لەلای ڕاست لە 2 نزیکدەبێتەوە

x	1.5	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.5
$f(x)$	-6	-30	-300	-3000	؟	3000	300	30	6

بەهای $f(x)$ بێسنوور کەمدەکات ← → بەهای $f(x)$ بێسنوور زیاددەکات

بە نەخشەی f دەوترێت لە ئامانجی بێپایان نزیکدەبێتەوە کاتێک x لەبەهای c نزیکدەبێتەوە ئەگەر بەها $f(x)$ بێسنوور زیادبکات یان کەمبکات.

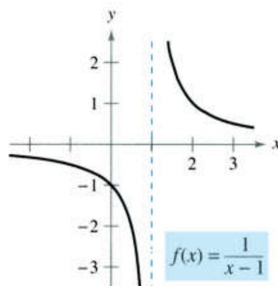
دۆزینەوە

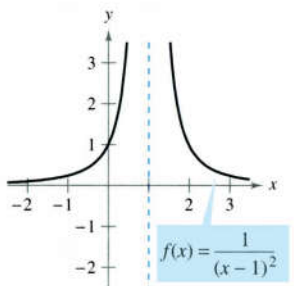
بۆ هەر نەخشەیەك ژمارەیەکی ڕاستی c لەبوارەکەی نەبێ دیاریکە، ئامانجی $f(x)$ بدۆزەوە کاتێک x لەلای ڕاست و لەلای چەپ لە c نزیکدەبێتەوە.

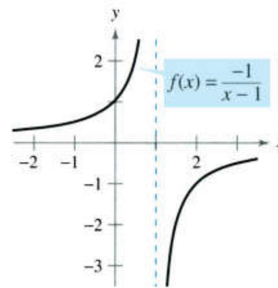
.1 $f(x)=\frac{3}{x-4}$ .2 $f(x)=\frac{1}{2-x}$ .3 $f(x)=\frac{2}{(x-3)^2}$

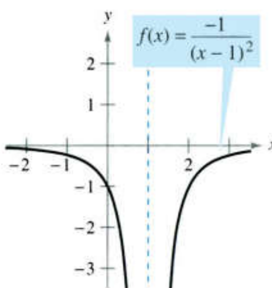
نموونــــه 1 دۆزینەوەی ئامانجە بێپایانەکان بە ڕوونکردنەوەیی

ئەم ڕوونکردنەوانەی خوارەوە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ئامانجی هەر نەخشەیەك کاتێك x لەلای ڕاست و لەلای چەپ لە 1 نزیکدەبێتەوە.









شیکار

.1 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{x-1} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x-1} = +\infty$

.2 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ ئامانجەکە لە هەردوولا دەکاتە $+\infty$

.3 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-1}{x-1} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-1}{x-1} = -\infty$

.4 $\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$ ئامانجەکە لە هەردوولا دەکاتە $-\infty$



.1 ئامانجی هەر نەخشەیەك بدۆزەوە کاتێك x لەلای ڕاست و لەلای چەپ لە -1 نزیکدەبێتەوە.

أ $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ ب $f(x) = \frac{1}{|x+1|}$

دەرکەنارە ستوونییەکان

ئەگەر لە توانادابوو ڕوونکردنەوەی نەخشەی پێشوو $f(x) = \frac{1}{x-1}$ بەرەو سەرەوە لە لای ڕاستی ڕاستەهێڵە خاڵدارە شینەکە وبەرەو لای خوارەوە لەلای چەپ درێژبکەیتەوە، دەبینیت ڕوونکردنەوەکە زیاترو زیاتر لەو ڕاستەهێڵە نزیکدەبێتەوە بێ ئەوەی پێبگات، دەتوانین بڵێین ئەو ڕاستەهێڵە بریتییە لە دەرکەناری ئەستوونی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە. (لەوانەکانی داهاتوو جۆرێکی تر لە دەرکەنارەکان دەخوێنیت).

پێناسەی دەرکەنارە ستوونییەکان

ئەگەر نەخشەی $f(x)$ لە $+\infty$ یان $-\infty$ نزیکبێتەوە کاتێك x لە c نزیکدەبێتەوە، ئەوا ڕاستەهێڵی ستوونی $x=c$ دەرکەناری ستوونی ڕوونکردنەوەی نەخشەکەیە.

ئەگەر بۆ نموونەی 1 بگەڕێتەوە دەبینیت هەر چوار نەخشەکە بریتیین لە نەخشەی ڕێژەیی، بۆ هەریەکێکیان دەرکەنارێکی ستوونی هەیە دەکاتە ڕاستەهێڵی $x=1$ تێبینیبکە ژمارەی 1 ژێرەکە بەلەجیاتی دانان دەکاتە 0 بەلاَم سەرەکە ناکاتە 0 دەتوانین ئەم تێبینییە گشتگیر بکەیت لەڕێی ئەم سەلمێنراوە.

سەلمێنراوی 2-3 **دەرکەناری ستوونی**

ئەگەر f و g دوو نەخشەی بەردەوام بن وئەگەر $f(c)\neq 0$ و $g(c)=0$ لەکاتێکدا کە $g(x)\neq 0$ لە هاوسێیەکانی $x=c$. ئەوا ڕاستە هێڵی $x=c$ دەبێتە دەرکەناری ستوونی نەخشەی.

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

واتە $x=c$ وا دەکات تەنها ژێرە بکات سفر.

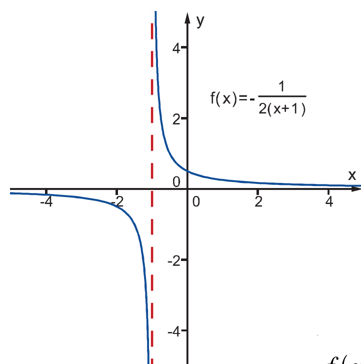
نموونــــــه 2

دۆزینەوەی دەرکەنارە ستوونییەکان

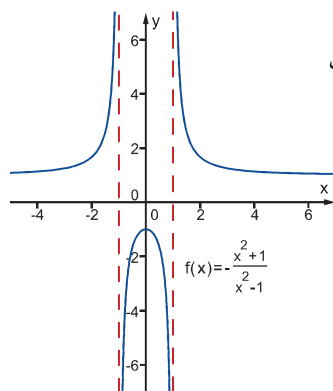
دەرکەنارە ستوونییەکانی هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

1. $f(x)=\frac{1}{2(x+1)}$
2. $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$
3. $f(x)=\frac{1}{\tan x}$

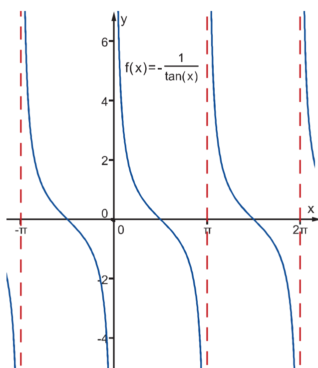
شیکار



1. ژێرەی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{2(x+1)}$ بەهای 0 وەردەگرێت کاتێك $x=-1$ لە کاتێکدا سەرەکەی یەکسان نابێت بە 0 لەو خاڵەدا. بەپشت بەستن بەسەلمێنراوی دەرکەنارە ستوونییەکان، ڕاستەهێڵی $x=-1$ دەبێتە دەرکەناری ستوونی نەخشەکە.



2. دەتوانیت نەخشەکە بەبەکارهێنانی شیتەڵکردن بەم شێوەی خوارەوە دووبارە بنووسیتەوە $f(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$ نووسینی نەخشە بەم شێوەیە ڕوونیدەکاتەوە کە 1 و -1 ژێرە دەکەنە سفر بەلەجیاتی دانان. لەلایەکی تر هیچیەك لەو دوو ژمارانە سەرە ناکەنە 0 ، بەپێی سەلمێنراوی دەرکەنارە ستوونییەکان ڕاستەهێڵەکانی $x=1$ و $x=-1$ دەبنە دەرکەناری ستوونی نەخشەکە وەك لەوێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر دەردەکەوێت.



3. دەتوانیت نەخشەکە بە شێوەی $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ دووبارە بنووسیەوە. ژێرە دەبێتە 0 کاتێك x ئەو بەهایانە وەردەگرێت کە $\sin x$ دەکەنە 0 کە بریتین لە چەندجارەکانی π لەلایەکی تر ئەو بەهایانە سەرە ناکەنە 0 بە پێی سەلمێنراوی دەرکەنارە ستوونییەکان ڕاستەهێڵەکانی $x=n\pi$ کە $n\in I$ هەموویان دەرکەناری ستوونین بۆ ئەو نەخشەیە وەك لەوێنەی بەرامبەردا دەردەکەوێت.

ئەو مەرجەی کە دەبێت $f(c)\neq 0$ لە سەلمێنراوی دەرکەناری ستوونی مەرجێکی بنەڕەتییە بۆ ئەوەی ڕاستەهێڵی $x=c$ ببێتە دەرکەناری ستوونی نەخشەکە (سەیری نموونە 3 بکە).

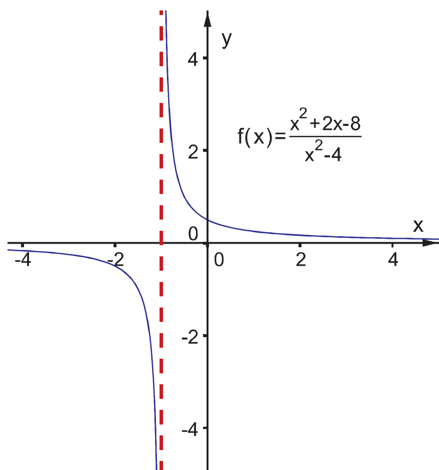


2. هەموو دەرکەنارە ستوونییەکان بۆ هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

أ $f(x)=\frac{2}{3x-2}$ ب $f(x)=\frac{x-1}{x^2-4}$ ج $f(x)=\frac{1}{\cos x}$

نموونـــــە 3 نەخشەیەکی ڕێژەیی سەرەو ژێرەکەی کۆڵکەی هاوبەشی هەبێت.

هەموو دەرکەنارە ستوونییەکانی نەخشەی $f(x)=\frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$ بدۆزەوە.



شیکار

دەستبکە بە نووسینی نەخشەکە بەسادەترین شێوە

$$f(x)=\frac{x^2+2x-8}{x^2-4}=\frac{(x+4)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{x+4}{x+2};\quad x\neq -2$$

دوو ژمارەی 2 و -2 ژێرەکە دەکەنە سفر بە لەجیاتیدانان، ئاشکرایە کە $x=-2$ دەرکەناری ستوونییە بۆ نەخشەکە چونکە ژێرەکە دەکاتە 0 بە لەجیاتیدانان و سەرەکەش ناکاتە 0

بەڵام $x=2$ سەرەو ژێرە دەکاتە 0 بەلەجیاتیدانان. ڕوونکردنەوەی نەخشەی f لەگەڵ ڕوونکردنەوەی نەخشەی $g(x)=\frac{x+4}{x+2}$ جووت دەبن کاتێك $x\neq 2$ لەم تێبینییە دەردەچێت کە بەهای $f(x)$ نە لە $+\infty$ و نە لە $-\infty$ نزیك نابنەوە کاتێك x لە 2 نزیکدەبێتەوە، بەمەش ڕاستەهێڵی $x=2$ نابێتە دەرکەناری ستوونی نەخشەکە.

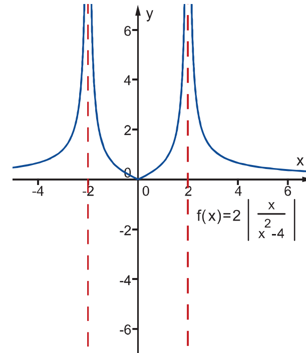


3. هەموو دەرکەنارە ستوونییەکانی نەخشەی $f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$ بدۆزەوە.

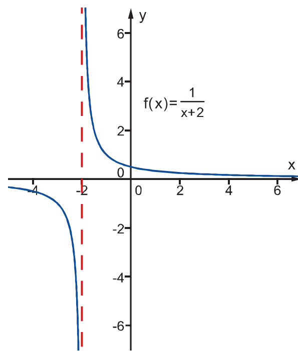
5-2 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تا 4 ئامانجی $f(x)$ بدۆزەوە کاتێك x لەلای ڕاست و لەلای چەپ لە $2-$نزیکدەبێتەوە.

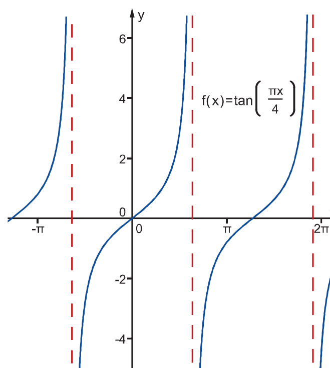
1 $f(x)=2\left|\dfrac{x}{x^2-4}\right|$



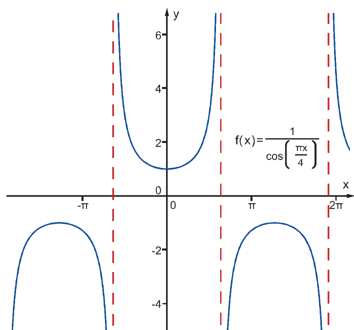
2 $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$



3 $f(x)=\tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$



4 $f(x)=\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)}$



لە ڕاهێنانی 5 تا 13 دەرکەنارە ستوونییەکانی نەخشەکە بدۆزەوە ئەگەر هەبوو.

5 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

6 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-9}$

7 $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x^2-x-2}$

8 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

9 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$

10 $f(x)=\dfrac{1}{\cos(\pi x)}$

11 $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$

12 $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$

13 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$

دەربارەی چەمکەکان

14 بەشێوازی خۆت مانای ئامانجی بێپایان باسبکە ئایا $+\infty$ ژمارەیەکی ڕاستییە.

15 بەشێوازی خۆت باسی دەرکەناری ستوونی بکە.

16 نەخشەیەکی ڕێژەیی بنووسە دەرکەناری ستوونی لە $x = 6$ ویەکێکی تر لە $x = -2$ دا و سفری لە $x=3$ دا هەبێت.

17 ئایا هەموو نەخشەیەکی ڕێژەیی دەرکەناری ستوونی هەیە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

18 **ناوەندە خێرایی** دووری نێوان دوو شار d km دەبێت. شۆفێرێك دوورییەکەی بەچوون وهاتن بڕی خێراییەکەی لە چوون و هاتنیدا 50 km/h وخێراییەکەی لە چوون x km/h و لەهاتن y km/h بوو.

[أ] بیسەلمێنە کە پەیوەندی لەنێوان x و y بەم شێوەیە دەنوسرێت $y = \frac{25x}{x-25}$، بواری ئەو نەخشەی بە $y = f(x)$ پێناسەکراوە چەندە؟

[ب] خشتەکە تەواوبکە.

x	30	40	50	60
y				

ئایا بەهایەکانی y جیاوازە لەو بەهایانەی کە پێشبینیت دەکرد؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

[ج] ئامانجی y بدۆزەوە کاتێك x لەلای ڕاست لە 25 نزیکدەبێتەوە و ئەنجامەکە لێکبدەوە.

ڕاست یان هەڵە؟ لە ڕاهێنانی 19 تا 22 دیاربکە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە یان هەڵەیە ئەوا بەدژە نموونەیەك بیسەلمێنە.

19 ئەگەر $p(x)$ نەخشەیەکی ڕادەداری بێت ئەوا نەخشەی $f(x) = \frac{p(x)}{x-1}$ دەرکەناری ستوونی لە $x = 1$ هەیە

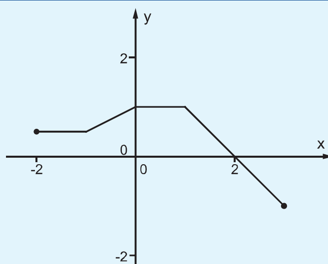
20 ئەگەر f نەخشەیەکی ڕێژەیی بێت ئەوا بەلایەنی کەم دەرکەنارێکی ستوونی هەیە.

21 نەخشەی ڕادەدار دەرکەناری ستوونی نییە.

22 ئەگەر نەخشەی f دەرکەناری ستوونی لە $x = 0$ دا هەبێت ئەوا لەو خاڵەدا پێناسەنەکراوە.

23 نەخشەی f و g بدۆزەوە کە $\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to c} g(x) = +\infty$ لەکاتێکدا $\lim\limits_{x \to c}[f(x) - g(x)] \neq 0$

دەربارەی چەمکەکان



24 ڕوونکردنەوەی ئەو نەخشەی لە بەرامبەردا کێشراوە بەکاربهێنە بۆ کێشانی ڕوونکردنەوەی $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ لە نێوان $x=-2$ و $x=3$.

بەشی 2

پێداچوونەوەی بەش

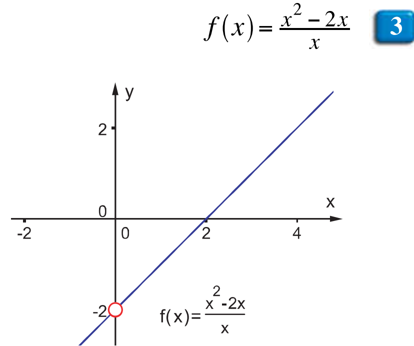
لە دوو ڕاهێنانی 1 و 2 دا دیاریکە کە ئەگەر شیکارکردنی پرسیارەکە پێویست بەبەکارهێنانی هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری دەبێت یان دەتوانرێت تەنها بەبەکارهێنانی جەبر شیکاری بکەیت ئەگەر بەجەبر شیکاردەکرێت، شیکارەکەی بدۆزەوە ئەگەر نەتوانرا هۆیەکەی ڕوونبکەوە.

1 درێژی پارچە هێڵی نێوان خاڵەکانی $(1, 1)$ و $(3, 9)$ لەسەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = 4x - 3$ بدۆزەوە.

2 درێژی ئەو کەوانەی بە خاڵەکانی $(1, 1)$ و $(3, 9)$ دیاریکراوە لەسەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = x^2$ بدۆزەوە.

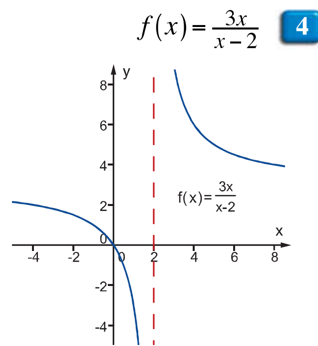
لە دوو ڕاهێنانی 3 و 4 دا وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ئامانجی داواکراو.

3 $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x}$



أ $\lim_{x \to 0} f(x)$ ب $\lim_{x \to 1} f(x)$

4 $f(x) = \frac{3x}{x - 2}$



أ $\lim_{x \to 2} f(x)$ ب $\lim_{x \to 0} f(x)$

لە ڕاهێنانی 5 تا 15 دا ئەگەر کرا ئەمانەی دێت بدۆزەوە.

5 $\lim_{x \to 4} \sqrt{x + 2}$

6 $\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

7 $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

8 $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4 + x} - 2}{x}$

9 $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 1}{x}$

10 $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$

11 $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{4x}{\tan x}$

12 $\lim_{x \to -5} \frac{x^3 + 125}{x + 5}$

13 $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

14 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \Delta x\right) - \frac{1}{2}}{\Delta x}$ لەبیرت بێت $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

15 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\pi + \Delta x) + 1}{\Delta x}$ لەبیرت بێت $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

لە دوو ڕاهێنانی 16 و 17 دا ئامانجی داواکراو بدۆزەوە ئەگەر زانیت $\lim_{x \to c} f(x) = -\frac{3}{4}$ و $\lim_{x \to c} g(x) = \frac{2}{3}$.

16 $\lim_{x \to c} (f(x)g(x))$

17 $\lim_{x \to c} (f(x) + 2g(x))$

لە ڕاهێنانی 18 تا 22 ئامانجی داواکراو بدۆزەوە (ئەگەر هەبوو) یان ئەگەر نەبوو هۆیەکەی دیاربکە.

18 ئامانجی نەخشەی $f(x)=\frac{|x-3|}{x-3}$ بدۆزەوە کاتێك x لەلای ڕاست لە 3 نزیکدەبێتەوە.

19 $\lim_{x\to 4}[x-1]$ کاتێك $[x]$ گەورەترین ژمارەی تەواو بچووکتر یا یەکسان بێت بە x.

20 $\lim_{x\to 2}f(x)$ کاتێك $f(x)=\begin{cases}(x-2)^2 & x\le 2\\ 2-x & x>2\end{cases}$

21 ئامانجی نەخشەی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & x\le 1\\ x+1 & x>1\end{cases}$ کاتێك x لەلای ڕاست لە 1 نزیکدەبێتەوە.

22 $\lim_{x\to 1}f(x)$ کاتێك $f(x)=\begin{cases}x^3+1 & x<1\\ \frac{1}{2}(x+1) & x\ge 1\end{cases}$

23 $\lim_{x\to -2}f(x)$ کاتێك $f(x)=\begin{cases}-x^2-4x-2 & x\le -2\\ x^2+4x+6 & x>-2\end{cases}$

لە ڕاهێنانی 24 تا 32 دیاربکە ئایا نەخشەکە خاڵی پچڕانی هەیە، ئەگەر هەیبوو بیدۆزەوە.

24 $f(x)=[x+3]$

25 $f(x)=\frac{3x^2-x-2}{x-1}$

26 $f(x)=\begin{cases}5-x & x\le 2\\ 2x-1 & x>2\end{cases}$

27 $f(x)=\begin{cases}\frac{3x^2-x-2}{x-1} & x\ne 1\\ 0 & x=1\end{cases}$

28 $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$

29 $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$

30 $f(x)=\frac{3}{x+1}$

31 $f(x)=\frac{x+1}{2x+2}$

32 $f(x)=\frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}$

33 بەهای c بدۆزەوە کەوا لە نەخشەی $f(x)=\begin{cases}x+3 & x\le 2\\ cx+6 & x>2\end{cases}$ دەکات خاڵی پچڕانی نەبێت.

34 بەهای c و بەهای b بدۆزەوە کەوا لە نەخشەی $f(x)=\begin{cases}x+1 & 1<x<3\\ x^2+bx+c & |x-2|\ge 1\end{cases}$ دەکات خاڵی پچڕانی نەبێت.

35 سەلمێنراوی نێوانە بەهایەکان بەکاربهێنە بۆ ئەوەی بسەلمێنیت نەخشەی $f(x)=2x^3-2x-1$ ڕەگێکی لە نێوان 1 و 2 دا هەیە.

لە ڕاهێنانی 36 تا 39 دەرکەنارە ستوونییەکان دیاربکە ئەگەر هەبوو.

36 $f(x)=1+\frac{2}{x}$

37 $f(x)=\frac{4x}{4-x^2}$

38 $f(x)=\frac{8}{(x-10)^2}$

39 $f(x)=\frac{1}{\sin\pi x}$

40 نەخشەی $f(x)=\frac{\tan 2x}{x}$ بەکاربهێنە کە $x\ne 0$.

أ $\lim_{x\to 0}f(x)$ بدۆزەوە ئەگەر هەبوو.

ب ئایا دەتوانیت دووبارە پێناسەی نەخشەکەلە $x=0$ بکەیتەوە بەشێوەیەك بەردەوام بێت لەو خاڵە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

بـــەشی 2

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە

نەخشەی $f(x)=\begin{cases}2-x & x\le 1\\ \frac{x}{2}+1 & x>1\end{cases}$ بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی **1** تاکو **4**.

1 بەهای $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ چەندە؟

أ $\frac{5}{2}$ ب $\frac{3}{2}$ ج 1 د 0 هـ بوونی نییە.

2 بەهای $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ چەندە؟

أ $\frac{5}{2}$ ب $\frac{3}{2}$ ج 1 د 0 هـ بوونی نییە.

3 بەهای $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ چەندە؟

أ $\frac{5}{2}$ ب $\frac{3}{2}$ ج 1 د 0 هـ بوونی نییە.

4 بەهای $f(1)$ چەندە؟

أ $\frac{5}{2}$ ب $\frac{3}{2}$ ج 1 د 0 هـ جگە لە

5 بەهای $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2}$ چەندە؟

أ $-\infty$ ب $+\infty$ ج 1 د $-\frac{1}{2}$ هـ -1

6 بەهای $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x}{x}$ چەندە؟

أ $\frac{1}{2}$ ب 1 ج 2 د $\cos 2$ هـ بوونی نییە.

7 بەهای $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$ چەندە؟

أ $\frac{1}{3}$ ب 1 ج 3 د $\sin 3$ هـ بوونی نییە.

8 لە چ ماوەیەك نەخشەی $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ خاڵ یان خاڵەکانی پچڕانی دەبێت؟

أ $]0,+\infty[$ ب $[-\infty,0[$ ج $]1,2[$ د $]0,2[$ هـ $[1,+\infty[$

9 کام لەو خاڵانەی خوارەوە خاڵی پچڕانی نییە بۆ نەخشەی $f(x)=\sqrt{x-1}$ ؟

أ $x=-1$ ب $x=-\frac{1}{2}$ ج $x=0$ د $x=\frac{1}{2}$ هـ $x=1$

10 کام لەمانەی خوارەوە بۆ نەخشەی $f(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 1 & x=1\\ -x+3 & 1<x<2\end{cases}$ ڕاست نییە.

أ $f(1)$ پێناسەنەکراوە
ب $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ هەیە
ج $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ هەیە
د $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ هەیە
هـ $\lim\limits_{x\to1} f(x)\neq f(1)$

11 کام لەم خاڵانەی خوارەوە خاڵی پچڕانە بۆ نەخشەی
$f(x)=\dfrac{x(x-1)(x-2)^2(x+1)^2(x-3)^2}{x(x-1)(x-2)(x+1)^2(x-3)^3}$ ولابردنی لەتوانادا نییە؟

أ $x=-1$
ب $x=0$
ج $x=1$
د $x=2$
هـ $x=3$

12 کام لەمانەی خوارەوە بۆ نەخشەی $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}x & 0\le x<4\\ 2 & x=4\\ -x+7 & 4<x\le 6\\ 1 & 6<x<8\end{cases}$ ڕاست نییە.

أ $\lim\limits_{x\to4} f(x)$ هەیە
ب $f(4)$ هەیە
ج $\lim\limits_{x\to6} f(x)$ هەیە
د $\lim\limits_{x\to8^-} f(x)$ هەیە
هـ $f(x)$ بەردەوامە $x=4$

13 کام لەمانە دەبێتە هاوکێشەی لێکەوتی نەخشەی $f(x)=9-x^2$ لە $x=2$ ؟

أ $y=\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}$
ب $y=-4x+13$
ج $y=-4x-3$
د $y=4x-3$
هـ $y=4x+13$

14 ئەم نەخشانەی خوارەوە بەهای x هەرچەند بێت جگە لە $x=0$ پێناسەکراوە، کام لەم نەخشانە دەتوانیت لە $x=0$ پێناسەبکەیت بۆ ئەوەی لە $x=0$ بەردەوام بێت.

أ $f(x)=\sin\frac{1}{x}$
ب $f(x)=\cos\frac{1}{x}$
ج $f(x)=\frac{x}{x^2}$
د $f(x)=\frac{\tan x}{x}$
هـ $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$

15 $f(x)=\begin{cases}x^2+4 & x<-1\\ x^3-8 & x\ge -1\end{cases}$

کام لەم بەهایانەی a نەخشەی f لەماوەی $]-\infty,+\infty[$ دەکاتە نەخشەیەکی بەردەوام؟

أ $a=-1$
ب $a=-8$
ج $a=9$
د $a=-10$
هـ هیچ بەهایەکی a جێبەجێی ناکات.

بەشی

3

داتاشراو Derivative

بەشی سێیەم

وانەکان

لەوێنەکە گەردەکانی ماددەی پاراسیتامۆڵ Paracetamol دەردەکەوێت کە بۆ کەمکردنەوەی ئازارەکان بەکاردەهێنرێت. سوودبەخش دەبێت کاتێك هێندی ڕێپێدراو وەردەگیرێت، بەڵام کاریگەری خراپی دەبێت تا ڕادەی ژەهراویبوون ئەگەر هێندی ڕێپێدراو لە بەکارهێنانی ڕەچاو نەکرێت. لەیەکێك لە توێژینەوەکان دەرکەوتووە تەنها ڕێژەی 30% خەڵکان ڕەچاوی هێندی دیاریکراو دەکەن لە بەکارهێنانیدا. نەخشەی $D(t)=\frac{750t}{t+12}$ نموونەیەکە بۆ هەژمارکردنی بڕی ڕێپێدراو بۆ منداڵان لە تەمەنی 1 ساڵی تا 12 ساڵی کاتێك t هێمایە بۆ تەمەنی منداڵ بەساڵ.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

هەر دەستەواژەیەکی لای ڕاست ببەستەوە بە لێکدانەوەکەی لەلای چەپ.

1
1. لاری ڕاستەهێڵ
2. نەخشەی بەردەوام
3. پچرانێك توانای لابردنی هەیە.
4. دەرکەناری ستوونی
5. $\lim_{x\to c} f(x)=L$

أ. ڕاستەهێڵێکی ئەستوونە، خاڵی $(x,f(x))$ ی سەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی f لێی نزیکدەبێتەوە، کاتێك بەهای x لە c نزیکدەبێتەوە.

ب. ڕێژەی بەرەوپێشچوونی ستوونی بۆ بەرەو پێشچوونی ئاسۆیی ڕاستەهێڵەکەیە.

ج. نەخشەی $f(x)$ لە ژمارەی L نزیکدەبێتەوە کاتێك x لە c نزیکدەبێتەوە.

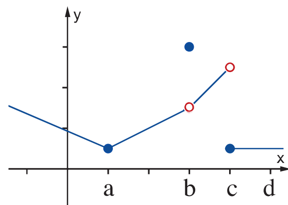
د. نەخشەیەکە دەتوانرێت ڕوونکردنەوەکەی بەقەڵەم لەسەر کاغەزێك بکێشرێت بێ ئەوەی دەستی لێ هەڵبگرین.

هـ. نەخشەیەکە ڕوونکردنەوەکەی پچرانی تێدایە.

و. خاڵێکی پچرانە بۆ نەخشەکە دەتوانرێت بەدووبارە پێناسەکردنەوە لابربردرێت.

هەبوونی ئامانجەکان

لە ڕاهێنانی 2 تا 7 نەخشەی f کە لە وێنەی بەرامبەردا ڕوونکراوەتەوە بەکاربهێنە. دیاربکە ئایا ئامانج بوونی هەیە یان نا.



2 $\lim_{x\to d} f(x)$ **3** $\lim_{x\to c^+} f(x)$ **4** $\lim_{x\to c^-} f(x)$

5 $\lim_{x\to c} f(x)$ **6** $\lim_{x\to b} f(x)$ **7** $\lim_{x\to a} f(x)$

نەخشە بەردەوامەکان

لە ڕاهێنانی 8 تا 11، نەخشەی f کە وێنەکەی لەسەرەوەدا ڕوونکراوەتەوە بەکاربهێنە. ئایا نەخشەکە بەردەوامە لە خاڵەکە یان نا، دیاریبکە.

8 $x = a$ **9** $x = b$ **9** $x = c$ **11** $x = d$

هەژمارکردنی ئامانجەکان

لە ڕاهێنانی 12 تا 14، ئامانج بدۆزەوە.

12 $\lim_{x\to -4} \sqrt{1-2x}$ **13** $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+1}{3x^2-2x+5}$ **14** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{4x}$

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ

لە دوو ڕاهێنانی 15 و 16 دا لاری ئەو ڕاستەهێڵەی بەو دوو خاڵەدا دەڕوات بدۆزەوە.

15 $(-2, 3)$ ؛ $(2, -1)$ **16** $(1, -3)$ ؛ $(-2, -1)$

لە دوو ڕاهێنانی 17 و 18 دا هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزەوە کە لارییەکەی دیاریکراوە و بە خاڵە دیاریکراوەکەدا دەڕوات.

17 $(1, 2)$ ؛ $-\frac{2}{3}$ **18** $(-2, -5)$؛ $\frac{5}{4}$

1–3

داتاشراو و بابەتی لێکەوت
Derivative and the Tangent Problem



ئیسحاق نیوتن 1642–1727
لەگەڵ کارکردنی لە پێشخستنی هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاکاری (ئیسحاق نیوتن، بەشدارییەکی گەورەی لەفیزیادا کردووە، لەوانەش یاسای تاودانی زەوی و سێ یاسایەکەی جوڵان)

ئامانجەکان

- لاری لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەیەك لە خاڵێك لە خاڵەکانیدا دەدۆزیتەوە.
- پێناسەی ئامانج بۆ دۆزینەوەی داتاشراوی نەخشە بەکاردەهێنیت.
- لەپەیوەندی نێوان بەردەوامی نەخشە و توانای داتاشراوەکەی تێدەگات.

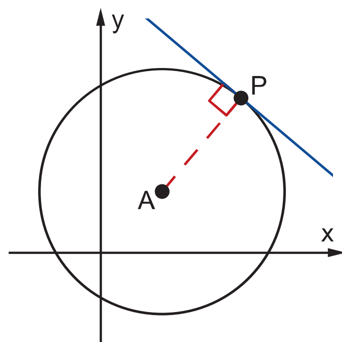
زاراوەکان Vocabulary

Difference quotient	ڕێژەی دوو جیاوازی
Secant	بڕەر
Tangent	لێکەوت
Slope	لاری
Differentiable	داتاشراوی یان توانای داتاشراوی هەیە
Derivative	داتاشراو

بابەتی لاری

جیاکاری و تەواوکاری پێشکەوت، بەهۆی لێکۆڵینەوە لە چوار بابەتی سەرەکی، کە زانا بیرکارییە ئەورووپییەکان لەسەدەی حەڤدەمدا گرنگیان پێدا.

1. بابەتی لێکەوت.
2. بابەتی خێرایی و تاودان.
3. بابەتی بەهایەکانی گەورەترین و بەهایەکانی بچووکترین.
4. بابەتی ڕووبەر.

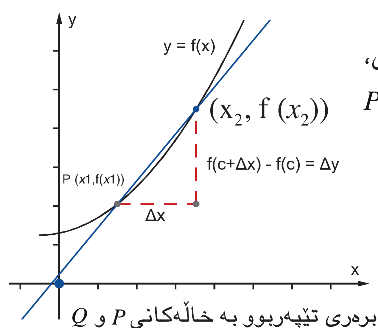


هەر بابەتێك لەو بابەتانە چەمکی ئامانج دەگرێتە خۆی. لەهەر یەکێکیانەوە دەتوانین بچینە ناو هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری.

دۆزینەوە

جیاکردنەوەی لاری: وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ بکێشە لەهەمان ڕووتەختی پۆتانەکان ڕاستەهێڵەکانی $y = x - 5$ و $y = 2x - 5$ و $y = 3x - 5$ بکێشە، کام لەم ڕاستەهێڵانە وەك لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەخاڵی $(0, -5)$ دەردەکەوێت، تێڕوانیت ڕوونبکەوە.

لەوانەکانی پێشوو باسی لێکەوتمان کردو گەیشتینە ئەوەی کە ئەو بابەتە بۆ دۆزینەوەی لاری لێکەوت دەگەڕێتەوە، بۆ دۆزینەوەی لاری نەخشەی f لەخاڵی P دا لەسەر ڕوونکردنەوەکەی، دەتوانیت هەژماری بەهای نزیکەیی لاری ئەو لێکەوتە لە خاڵی P بکەیت، بە بەکارهێنانی ڕاستەهێڵێك کە بەخاڵی لێکەوت P و خاڵێکی تری سەر ڕوونکردنەوەی نەخشەکەدا دەڕوات، هەروەك لەوێنەی بەرامبەردا ڕوونکراوەتەوە، بەو ڕاستەهێڵە دەوترێت **بڕەری** ڕوونکردنەوەی نەخشەکە. ئەگەر $P((x_1), f(x_1))$ خاڵێکی لێکەوت و $Q\ (x_2, f(x_2))$ خاڵێکی تری سەر ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بێت، ئەوا لاری ئەو ڕاستەهێڵەی بەو دوو خاڵەدا دەڕوات دەکاتە:



بڕەری تێپەڕبوو بە خاڵەکانی P و Q

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\triangle y}{\triangle x} \quad \text{کاتێك} \quad \triangle y = f(x_2) - f(x_1) \text{ و } \triangle x = x_2 - x_1$$

بەرێژەی $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ دەوترێت ڕێژەی **دوو جیاوازی**. Δx بریتییە لە گۆڕان لەبەهایەکانی x و Δy بریتییە لە گۆڕان لە بەهایەکانی y کە لەگۆڕانی بەهای x دەردەچێت، دەتوانیت ئەو ڕێژەیە بۆ دەستکەوتنی بەهای نزیکەیی لاری لێکەوت بەکاربهێنێت، وردی ئەو بەهایە زیاددەکات هەرچەندە Q لەخاڵی P نزیکببێتەوە.

پێناسەی لاری نەخشە لە $x=c$

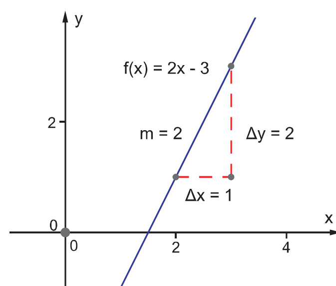
ئەگەر f نەخشەیەك بێت و ئەم ئامانجە هەبێت

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=m$$

ئەوا لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لە $P(c,f(c))$ بریتییە لەو ڕاستەهێڵەی لارییەکەی m و بەخاڵی Pدا دەڕوات، بەلاری لێکەوتی ڕوونکردنەوەی لاری نەخشەکە لەخاڵی $P(c,f(c))$ پێیدەوترێت لاری نەخشەکە لە $x=c$.

نموونە 1

لاری نەخشەی هێڵی



لاری نەخشەی هێڵی $f(x)=2x-3$ لە $x=2$ بدۆزەوە.

بۆ دۆزینەوەی لاری نەخشەکە لە $x=2$ دەتوانیت پێناسەی لاری نەخشەکە بەکاربهێنیت.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[2(2+\Delta x)-3]-[2(2)-3]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4+2\Delta x-3-4+3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}$$

$$=2$$

کەواتە لاری نەخشەی $f(x)=2x-3$ لە $x=2$ دەکاتە $m=2$.

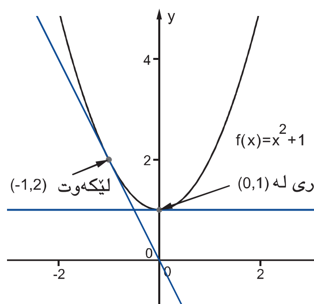


1. لاری نەخشەی هێڵی $f(x)=-3x-5$ لە $x=-3$ بدۆزەوە.

لەبەرئەوەی وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی هێڵی ڕاستەهێڵە، ئەوا لاری نەخشەی هێڵی لەهەر خاڵێك لە خاڵەکانی وێنە ڕوونکردنەوەکە هەمان بەهایە، بەڵام کارەکە جیاوازە کاتێك نەخشەکە هێڵی نەبێت.

نموونە 2

لاری نەخشەیەك هێڵی نەبێت



لاری f لە $x=c$ بریتییە لە $m=2c$

لاری نەخشەی دووجای $f(x)=x^2+1$ لە $x=c$ پاشان لە $x=0$ و $x=-1$ دا بدۆزەوە.

ئەگەر $(c,f(c))$ خاڵێك بێت لەسەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی f ئەوا لاری لێکەوت لەو خاڵەدا دەکاتە:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[(c+\Delta x)^2+1\right]-\left[c^2+1\right]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c^2+2c\Delta x+(\Delta x)^2+1-c^2-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2c\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

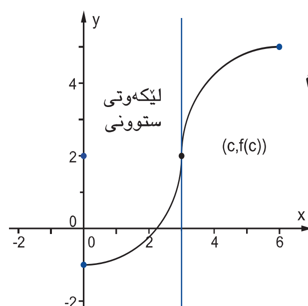
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2c+\Delta x)$$

$$=2c$$

هەروەها لاری نەخشەی f لە $x=c$ دەکاتە $m=2c$ خاڵی $(c,\ f(c))$ ی سەر وێنەی ڕوونکردنەوەکەی هەر چەند بێت، لەمەش دەردەچێت لاری نەخشەکە لە $x=0$ دەکاتە $m=2(0)=0$ و لە $x=-1$ دەکاتە $m=2(-1)=-2$



2. لاری نەخشە دووجای $f(x)=-2x^2-3$ لە $x=1$ و $x=-1$ بدۆزەوە.



پێناسەی پێشوو بۆ لاری نەخشەیەك لەخاڵێکی ڕوونکردنەوەکەی ئەستوونبوونی لێکەوت لەو خاڵەدا ناگرێتەوە، لەم بارەدا دەتوانیت ئەم پێناسەیە بەکاربهێنیت: ئەگەر نەخشەکە بەردەوام بێت لە $x=c$ وە

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=+\infty$$

یان

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=-\infty$$

ئەوا ڕاستەهێڵی ئەستوونی $x=c$ **لێکەوتی ئەستوونی** نەخشەکەیە لە خاڵی $(c,\ f(c))$ وە لاری نەخشەکە لەو خاڵەدا پێناسەنەکراوە.

لەوێنەی بەرامبەردا نەخشەیەك دەردەکەوێت لێکەوتێکی ئەستوونی لە $x=3$ هەیە.

پێناسەی داتاشراو

بەنەخشەی f دەوترێت **توانای داتاشراوی** هەیە لە $x=c$ ئەگەر لارییەکەی لەو خاڵەدا پێناسەکرابێت.

ئێستا دەتوانین پێناسەی داتاشراوی نەخشە بکەین.

ئەگەر f نەخشەیەك بێت توانای داتاشراوی لە هەموو خاڵەکانی بوارەکەیدا هەبێت، ئەوا دەتوانیت هەر بەهایەکی c لەبواری نەخشەکە بە لارییەکەی f' لە $x=c$ ببەستێتەوە، ئەو نەخشەیە بەشێوەی f' دەنووسرێت و پێی دەوترێت داتاشراوی نەخشەی f.

ئەوانەی لەبواری بیرکاری کاردەکەن چەندین هێما بەکاردەهێنن بۆ دەربڕینی بەهای داتاشراو f'. نووسینەکان ئەمانەن. $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ و $f'(x)$ ، $\frac{df}{dx}$ ، $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)$ ، $D_x(y)$

نموونە 3 دۆزینەوەی داتاشراوی نەخشە بەبەکارهێنانی پێناسە

داتاشراوی نەخشەی $f(x)=\frac{2}{x}$ بدۆزەوە.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2}{x+\Delta x}-\frac{2}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2x-2(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

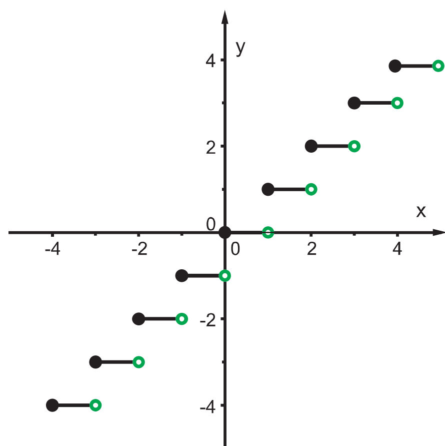
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(x)(x+\Delta x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2}{x(x+\Delta x)}=\frac{-2}{x^2}$$



3. داتاشراوی نەخشەی $f(x)=x^3$ بدۆزەوە.

بەردەوامی و توانای داتاشراو

بینیمان لاری نەخشە لە $x=c$ بریتییە لە ئامانجی لاری ئەو بڕەری بەخاڵی $P(c,f(c))$ و خاڵێکی نزیك لێی $Q(x,f(x))$دا دەڕوات کاتێك Q لە P نزیکدەبێتەوە، ئەمە ڕێگامان پێدەدات بنووسین $f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ بەمەرجێك ئەو ئامانجە هەبێت.



نەخشەی $f(x)=[x]$ توانای داتاشراوی نییە لە خاڵی $(0,f(0))$ چونکە لەو خاڵەدا بەردەوام نییە

ئەگەر نەخشەی f لە خاڵی $(c,\ f(c))$ بەردەوام نەبێت ئەوا توانای داتاشراوی لەو خاڵەدا نابێت. لەوێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=[x]$ دەردەکەوێت کە هەر ژمارەیەکی ڕاستی x بە ژمارەیەکی تەواوی گەورەتر کە لەو زیاتر نەبێت دەبەستێتەوە، دیارە کە ئەو نەخشەیە لە $x=0$ بەردەوام نییە، وتوانای داتاشراوی لەو خاڵەدا نییە، چونکە

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x-0}=0$$

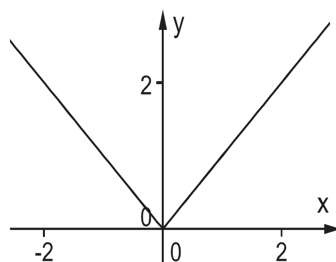
و $$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-1-0}{x-0}=-\infty$$

کەواتە $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ بوونی نییە.

سەلمێنراوی 1-3 توانای داتاشراو بەردەوامی دەسەپێنێت

ئەگەر نەخشەی f لە خاڵی $(c,\ f(c))$ توانای داتاشراوی هەبێت، ئەوا بەردەوام دەبێت لەو خاڵەدا.

ئایا پێچەوانەی سەلمێنراوەکەی سەرەوە ڕاستە؟ واتە ئایا بەردەوامی نەخشەیەك لەخاڵێکی سەر ڕوونکردنەوەکەی توانای داتاشراوی نەخشەکە دەسەپێنێت؟ وەڵامەکەی نەخێرە، وەك لە نەخشەی ڕووتی: $f(x)=|x|$ دەردەکەوێت.



$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x-0}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x-0}=1$$

ئەمەش ئەوە دەسەلمێنێت $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ بوونی نییە بەمەش نەخشەکە لاری نییە لە $x=0$.

1-3 ڕاهێنان

لە پرسیاری 1 تا 3 لاری نەخشەکە لە خاڵی دیاریکراوەکەدا بدۆزەوە.

1 $f(x)=3-2x$، $(-1,5)$ **2** $f(x)=x^2-4$، $(1,-3)$ **3** $f(t)=3t-t^2$، $(0,0)$

لە پرسیاری 4 تا 11 داتاشراوی هەر نەخشەیەك بە بەکارهێنانی ئامانجەکان بدۆزەوە.

4 $f(x)=3$ **5** $f(x)=3x+2$ **6** $f(x)=2x^2+x-1$ **7** $f(x)=x^3+x^2$

8 $f(x)=\frac{1}{x-1}$ **9** $f(x)=\sqrt{x+1}$ **10** $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}$ **11** $f(x)=9-\frac{1}{2}x$

لە پرسیاری 12 تا 15 هاوکێشەی لێکەوتی نەخشەکە لە خاڵە دیاریکراوەکە بدۆزەوە.

12 $f(x)=x^2+1$ ؛ $(2,5)$ **13** $f(x)=x^3$ ؛ $(2,8)$

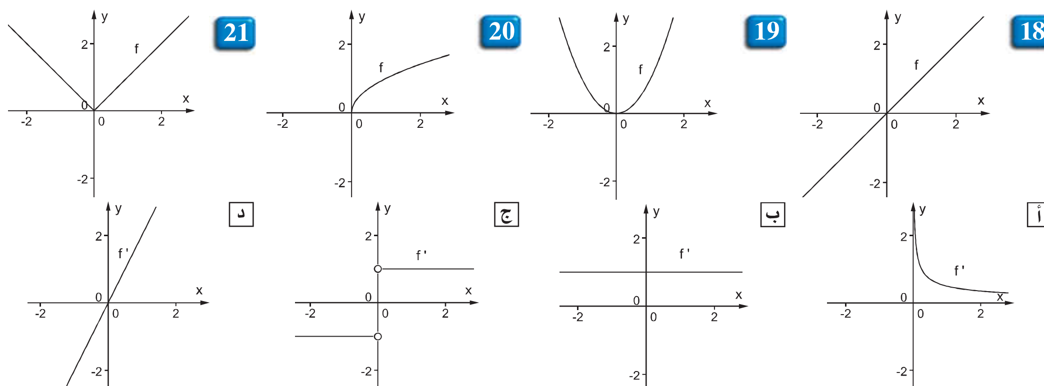
14 $f(x)=\sqrt{x-1}$ ؛ $(5,2)$ **15** $f(x)=x+\frac{4}{x}$ ؛ $(4,5)$

لە ڕاهێنانی **16** و **17** دا هاوكێشەی لێكەوتی نەخشەی تەریب بەو ڕاستەهێڵەی كە هاوكێشەكەی دیاریكراوە بدۆزەوە.

16 $f(x)=x^3+2$ ؛ $3x-y+1=0$

17 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ؛ $x+2y-6=0$

لە ڕاهێنانی **18** تا **21** وێنەی ڕوونكردنەوەی **4** نەخشەو وێنە ڕوونكردنەوەی داتاشراوەكانیان كێشراوە، وێنەی ڕوونكردنەوەی داتاشراوی هەر نەخشەیەك كە بۆ نەخشەكە دەگەڕێتەوە دیاربكە.

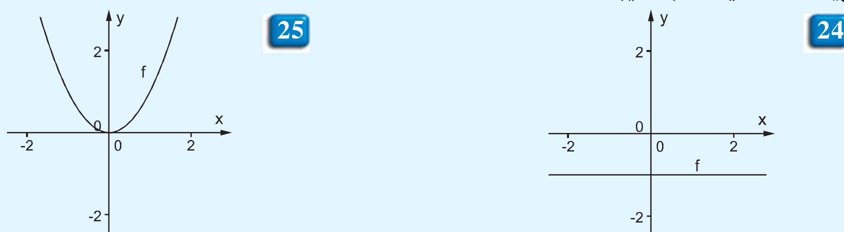


22 لێكەوتی نەخشەی g لە خاڵی $(5,2)$ بەخاڵی $(9,0)$ دا دەڕوات، $g(5)$ و $g'(5)$ بدۆزەوە.

23 لێكەوتی نەخشەی h لە خاڵی $(-1,4)$ بەخاڵی $(3,6)$ دا دەڕوات، $h(-1)$ و $h'(-1)$ بدۆزەوە.

لە بارەی چەمكەكان

لە دوو ڕاهێنانی **24** و **25** دا وێنەی ڕوونكردنەوەی داتاشراوی نەخشەكە بكێشە، چۆن وێنەكەت كێشا؟ باسیبكە.



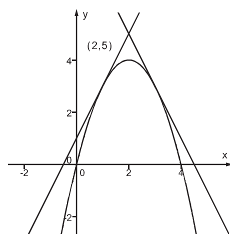
26 نەخشەیەك بكێشە هەموو بەهایەكانی داتاشراوەكەی سالب بێت.

لە ڕاهێنانی **27** تا **28** ئامانجە نووسراوەكە $f'(c)$ دەنوێنێت. $f(x)$ و c بدۆزەوە.

27 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[5-3(1+\Delta x)]-2}{\Delta x}$

28 $\lim_{x\to 6}\frac{-(6+\Delta x)^2+36}{\Delta x}$

لە دوو پرسیاری **29** و **30** دا نەخشەی f كە مەرجە دیاریكراوەكان جێبەجێ دەكات بدۆزەوە، پاشان وێنە ڕوونكردنەوەكەی بكێشە.



29 $f(0)=2$ ؛ $f'(x)=-3$ كاتێك $-\infty<x<\infty$.

30 $f(0)=4$ ؛ $f'(0)=0$ ؛ $f'(x)<0$ كاتێك $x<0$ ؛ $f'(x)>0$ كاتێك $x>0$.

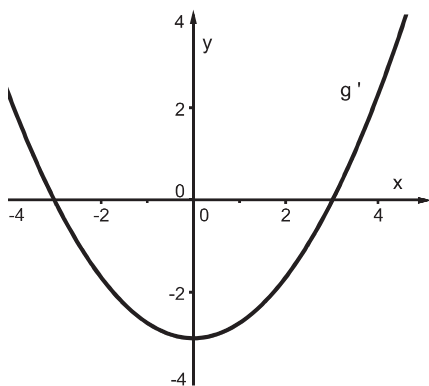
31 هاوكێشەی دوو لێكەوتەكەی نەخشەی $f(x)=-x(x-4)$ لە وێنەی بەرامبەر بدۆزەوە.

32 وادابنێ $f'(c)=3$ ئەوا $f'(-c)$ کە بدۆزەوە.

أ ئەگەر f نەخشەیەکی تاك بێت.

ب ئەگەر f نەخشەیەکی جووت بێت.

33 لە وێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی داتاشراوی g' بۆ نەخشەی g دەردەکەوێت.



أ $g'(0)$ بدۆزەوە.

ب $g'(3)$ بدۆزەوە.

ج چ دەرئەنجامێکت لەبارەی نەخشەی g دەستدەکەوێت ئەگەر زانیت $g'(1)=-\frac{8}{3}$ ؟

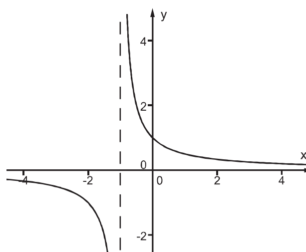
د چ دەرئەنجامێکت لە بارەی نەخشەی دەستدەکەوێت ئەگەر زانیت کە $g'(-4)=\frac{7}{3}$.

هـ ئایا $g(6)-g(4)$ موجەبە یان سالب؟ ڕوونیبکەوە.

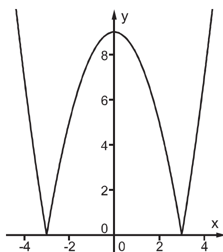
و ئایا دەتوانیت $g(2)$ بدۆزیتەوە؟ ڕوونیبکەوە.

لە پرسیاری 34 تا 36 بەهایەکانی x بدۆزەوە، کاتێك نەخشەکە توانای داتاشرانی هەبێت.

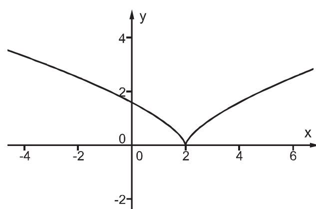
34 $f(x)=\frac{1}{x+1}$



35 $f(x)=\left|x^2-9\right|$



36 $f(x)=(x-2)^{\frac{2}{3}}$



لە پرسیاری 37 تا 39، دیاربکە کە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە، یان ئەگەر هەڵەیە بە دژە نموونەیەك بیسەلمێنە.

37 لاری لێکەوتی نەخشەی f کە لە خاڵی $(2,f(2))$ توانای داتاشرانی هەیە دەکاتە $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

38 ئەگەر نەخشەیەك لەخاڵێك بەردەوام بێت، ئەوا توانای داتاشرانی هەیە لەو خاڵەدا.

39 ئەگەر نەخشەیەك لەخاڵێك توانای داتاشرانی هەبێت، ئەوا بەردەوامە لەو خاڵەدا.

40 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ ڕوونیبکەوە f بەردەوامە و توانای داتاشراوی نییە لە $x=0$، لەکاتێکدا g توانای داتاشراوی هەیە لەو خاڵە، $g'(0)$ بدۆزەوە.

2–3 ڕێساکانی داتاشراو
Differentiation Rules

ئامانجەکان
- داتاشراوی نەخشە بنەڕەتییەکان دەناسێت و بەکاریاندەهێنێت.
- ڕێساکانی داتاشراو دیاریدەکات و بەکاریاندەهێنێت.

داتاشراوی نەخشە بنەڕەتییەکان

لە وانەکانی پێشوو مانای داتاشراوت زانی وئامانجت بەکارهێنا بۆ دۆزینەوەی داتاشراوی هەندێك نەخشەی سادە، بەڵام ئەو ڕێگایە ئاسان نییە بۆ زۆربەی نەخشەکان، لەبەرئەوە بیرکاریناسان پەنایان بردە بەر دۆزینەوەی ڕێساکانی داتاشراو. ئەم ڕێگایەش پشت بەو دەرئەنجامە دەبەستێت کە زۆربەی نەخشەکان لە نەخشە بنەڕەتییەکان بە کۆکردنەوە و لێدەرکردن و لێکدان و دابەشکردن و ئاوێتە کردن دروست دەکرێن، بەمەش زانینی داتاشراوی نەخشە بنەڕەتییەکان و ئەو ڕێسایانەی کە لە داتاشراوکاری پێدەکرێت، یارمەتیت دەدات بۆ دۆزینەوەی داتاشراوی زۆربەی نەخشەکان.

ئەم خشتەی خوارەوە پوختەی ڕێساکانی داتاشراوی نەخشە بنەڕەتییەکانە.

خشتەی داتاشراوە بنەڕەتییەکان	
نەخشە	**داتاشراوەکەی**
$f(x)=c$ کاتێك c ژمارەیەکی ڕاستییە	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=x^n$ کاتێك $n\in R$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\frac{1}{x}\ ;x\neq 0$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$

نموونـــە 1 بەکارهێنانی داتاشراوە بنەڕەتییەکان

ئەم خشتە تەواوبکە.

نەخشە	داتاشراوەکەی
$f(x)=x^5$	
$f(x)=\sqrt[3]{x}$	
$f(x)=\frac{1}{x^3}$	

شیکار

نەخشە	داتاشراوەکەی
$f(x)=x^5$	$f'(x)=5x^4$
$f(x)=\sqrt[3]{x}$	$f'(x)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$f(x)=\frac{1}{x^3}$	$f'(x)=\left(x^{-3}\right)'=-3x^{-4}=\frac{-3}{x^4}$



1 ئەم خشتە تەواوبکە.

نەخشە	داتاشراوەکەی
$f(x)=x^{16}$	
$f(x)=\sqrt[3]{x^2}$	
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	

ڕێساکانی داتاشراو

سەلمێنراوی 3-2 ڕێسای لێدان لە نەگۆڕ

ئەگەر نەخشەی f توانای داتاشراوی هەبێت و c ژمارەیەکی ڕاستی بێت ئەوا نەخشەی cf توانای داتاشراوی هەیە.

$$[cf(x)]'=cf'(x)$$

سەلمێنراوی 3-3 ڕێسای سەرجەم و جیاوازی

سەرجەم یان جیاوازی دوو نەخشە توانای داتاشراویان هەبێت، دەکاتە نەخشەیەك توانای داتاشراوی هەیە.

$$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x) \qquad [f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$$

ئێستا دەتوانین شێوەی گشتی داتاشراوی نەخشەی ڕادەدار بدۆزینەوە، سەلماندنی ئەو سەلمێنراوەی دێت نموونەیەکە بۆ چۆنیەتی بەکارهێنانی داتاشراوە بنەڕەتییەکان وڕێساکانی داتاشراو بۆ دۆزینەوەی داتاشراوی نەخشەیەك.

سەلمێنراوی 3-4 داتاشراوی نەخشەی ڕادەدار

ئەگەر

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

ئەوا

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+2a_2x+a_1$$

سەلماندن

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

$$f'(x)=\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\right)'$$

$$=\left(a_nx^n\right)'+\left(a_{n-1}x^{n-1}\right)'+...+\left(a_1x\right)'+\left(a_0\right)'$$ ڕێسای سەرجەم

$$=a_n\left(x^n\right)'+a_{n-1}\left(x^{n-1}\right)'+...+a_1\left(x\right)'+\left(a_0\right)'$$ ڕێسای لێدان لە نەگۆڕ

$$=a_n(nx^{n-1})+a_{n-1}\left((n-1)x^{n-2}\right)+...+a_1(1)+0$$ داتاشراوە بنەڕەتییەکان

$$=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+...+2a_2x+a_1$$ سادەکردن

نموونـــــە 2 بەکارهێنانی کەوانەکان لە داتاشراو

ئەم خشتە تەواوبکە.

نەخشە	ڕێکخستنی نەخشە	داتاشراو	داتاشراوی سادەکراو
$f(x)=\frac{5}{2x^3}$			
$f(x)=\frac{5}{(2x)^3}$			
$f(x)=\frac{7}{3x^{-2}}$			
$f(x)=\frac{7}{(3x)^{-2}}$			
$f(x)=\frac{4}{x\sqrt{x}}$			

شیکار

نەخشە	ڕێکخستنی نەخشە	داتاشراو	داتاشراوی سادەکراو
$f(x)=\frac{5}{2x^3}$	$f(x)=\frac{5}{2}\left(x^{-3}\right)$	$f'(x)=\frac{5}{2}\left(-3x^{-4}\right)$	$f'(x)=\frac{-15}{2x^4}$
$f(x)=\frac{5}{(2x)^3}$	$f(x)=\frac{5}{8}\left(x^{-3}\right)$	$f'(x)=\frac{5}{8}\left(-3x^{-4}\right)$	$f'(x)=\frac{-15}{8x^4}$
$f(x)=\frac{7}{3x^{-2}}$	$f(x)=\frac{7}{3}\left(x^2\right)$	$f'(x)=\frac{7}{3}(2x)$	$f'(x)=\frac{14}{3}x$
$f(x)=\frac{7}{(3x)^{-2}}$	$f(x)=63\left(x^2\right)$	$f'(x)=63(2x)$	$f'(x)=126x$
$f(x)=\frac{4}{x\sqrt{x}}$	$f(x)=4\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$	$f'(x)=4\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^{-\frac{3}{2}-1}\right)$	$f'(x)=-6\left(x^{-\frac{5}{2}}\right)=\frac{-6}{x^2\sqrt{x}}$



2. خشتەکە تەواوبکە.

نەخشە	ڕێکخستنی نەخشە	داتاشراو	داتاشراوی سادەکراو
$f(x)=\frac{-2}{3x^5}$			
$f(x)=\frac{-5}{(3x)^2}$			
$f(x)=\frac{9}{5x^{-3}}$			
$f(x)=\frac{7}{(2x)^{-5}}$			

نموونـــــە 3

بەکارهێنانی ڕێسایەکانی داتاشراو و داتاشراوە بنەڕەتییەکان

ئەم خشتە تەواوبکە.

نەخشە	داتاشراو
$f(x)=x^3-4x+5$	
$f(x)=-\frac{x^4}{2}+3x^3-2x$	
$f(x)=\frac{\sin x}{2}$	
$f(x)=x+\cos x$	

شیکار

نەخشە	داتاشراو
$f(x)=x^3-4x+5$	$f'(x)=\left(x^3-4x+5\right)'=\left(x^3\right)'-(4x)'+(5)'=3x^2-4$
$f(x)=-\frac{x^4}{2}+3x^3-2x$	$f'(x)=\left(-\frac{x^4}{2}+3x^3-2x\right)'=\left(-\frac{x^4}{2}\right)'+\left(3x^3\right)'-(2x)'$ $=-2x^3+9x^2-2$
$f(x)=\frac{\sin x}{2}$	$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{2}\right)'=\left(\frac{1}{2}\sin x\right)'=\frac{1}{2}\cos x$
$f(x)=x+\cos x$	$f(x))'=(x+\cos x)'=(x)'+(\cos x)'=1-\sin x$



3. ئەم خشتە تەواوبکە.

نەخشە	داتاشراو
$f(x)=-2x^5+3x^3+5x^2$	
$f(x)=-\frac{x^5}{5}-7x^3+8$	
$f(x)=\frac{\tan x}{2}-\frac{1}{2}\sin x$	
$f(x)=\frac{1}{2}x-\cos x$	

سەلمێنراوی 3-5 ڕێسای ئەنجامی لێکدان

ئەنجامی لێکدانی دوو نەخشە توانای داتاشراویان هەبێت دەکاتە نەخشەیەك توانای داتاشراوی هەیە.

$$\left[f(x)g(x)\right]' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

سەلمێنراوی 3-6 ڕێسای ئەنجامی دابەشبوون

ئەگەر f و g دوو نەخشەبن توانای داتاشراویان هەبێت، ئەوا نەخشەی $\frac{f}{g}$ توانای داتاشراوی هەیە کاتێك $g(x) \neq 0$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

نموونـــــە 4 بەکارهێنانی ڕێساکانی داتاشراو و داتاشراوە بنەڕەتییەکان

داتاشراوی نەخشەکە بدۆزەوە.

1 $f(x) = 3x^2 \sin x$

2 $f(x) = \frac{5x-2}{x^2+1}$

شیکار

1 $f'(x) = \left[3x^2 \sin x\right]' = 3x^2\left[\sin x\right]' + \sin x\left[3x^2\right]'$

$= 3x^2 \cos x + (\sin x)(6x) = 3x^2 \cos x + 6x \sin x$

2 $f'(x) = \left(\frac{5x-2}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+1)(5x-2)' - (5x-2)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{(x^2+1)(5) - (5x-2)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-5x^2+4x+5}{(x^2+1)^2}$



4. داتاشراوی نەخشەکە بدۆزەوە.

1 $f(x) = -2x^3 \cos x$

2 $f(x) = \frac{3x-7}{x^2-1}$

نموونـــــە 5 بەکارهێنانی ڕێساکانی داتاشراو و داتاشراوە بنەڕەتییەکان

ڕێسای داتاشراوی نەخشەی $f(x) = \tan x$ بسەلمێنە.

شیکار

$f'(x) = \left[\tan x\right]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\cos)\left[\sin x\right]' - (\sin x)\left[\cos x\right]'}{(\cos x)^2}$

$= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$



5. داتاشراوی نەخشەی $f(x) = \frac{1}{\tan x}$ بدۆزەوە.

سەلمێنراوی 7-3 ڕێسای نەخشەی ئاوێتە

ئەگەر f نەخشەیەك بێت بەپێی u توانای داتاشرانی هەبێت و $u = g(x)$ نەخشەیەك بێت بەپێی x توانای داتاشراوی هەبێت، ئەوا نەخشەی $y = f(g(x))$ توانای داتاشراوی هەیە.

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x)$$

سەلماندن

$$\left(f(g(x))\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} = \lim_{x_2\to x_1}\frac{f(g(x_2))-f(g(x_1))}{x_2-x_1}$$

کاتێك $x_1 = x$ و $x_2 = x_1 + h$

$$= \lim_{x_2\to x_1}\frac{f(g(x_2))-f(g(x_1))}{g(x_2)-g(x_1)}\,\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$= \lim_{x_2\to x_1}\frac{f(g(x_2))-f(g(x_1))}{g(x_2)-g(x_1)}\lim_{x_2\to x_1}\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$$

لەبەرئەوەی نەخشەی g بەردەوامە ئەوا $g(x_2)$ لە $g(x_1)$ نزیکدەبێتەوە کاتێك x_2 لە x_1 نزیکدەبێتەوە.

$$= \lim_{g(x_2)\to g(x_1)}\frac{f(g(x_2))-f(g(x_1))}{g(x_2)-g(x_1)}\lim_{x_2\to x_1}\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$= f'(g(x))g'(x)$$

لەوانەیە لە دیاریکردنی ئەو نەخشانەی کە نەخشە ئاوێتەکە پێکدەهێنن تووشی ئاستەنگ ببیتەوە ئەو نموونەیەی خوارەوە هەندێك نموونە ڕوونده‌کاتەوە.

نموونــــه 6 بەکارهێنانی ڕێساکانی داتاشراو و نەخشە بنەڕەتییەکان

ئەم خشتە تەواوبکە.

$y = f(g(x))$		
$y=\frac{1}{x+1}$		
$y=\sin 2x$		
$y = \sqrt{3x^2 - x + 1}$		
$y=\tan^2 x$		

شیکار

$y = f(g(x))$	$u=g(x)$	$y=f(u)$
$y=\frac{1}{x+1}$	$u=x+1$	$y=\frac{1}{u}$
$y=\sin 2x$	$u = 2x$	$y=\sin u$
$y = \sqrt{3x^2 - x + 1}$	$u = 3x^2 - x + 1$	$y = \sqrt{u}$
$y=\tan^2 x$	$u=\tan x$	$y=u^2$



6. ئەم خشتە تەواوبکە.

$y=f(g(x))$	$u=g(x)$	$y=f(u)$
$y=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$		
$y=\cos \pi x$		
$y=\sqrt{4x^5-5x^4}$		
$y=(1+\tan x)^2$		

نموونــــە 7

داتاشراوی نەخشەی ئاوێتە

داتاشراوی نەخشەی $y=(x^2+1)^3$ بدۆزەوە.

شیکار

دەتوانیت ئەو دوو نەخشەیە دیاربکەین کە ئەو نەخشە ئاوێتەیە پێکدەهێنن $u=x^2+1$ و $y=u^3$ لەوەش دەردەچێت.

$$y'(x)=y'(u)u'(x)=(3u^2)(2x)=3(x^2+1)^2(2x)=6x(x^2+1)^2$$



7. داتاشراوی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ بدۆزەوە.

3–2 ڕاهێنان

لە پرسیاری 1 تا 11 داتاشراوی نەخشەکە بدۆزەوە.

1 $y=8$

2 $f(x)=x^6$

3 $f(x)=\frac{1}{x^7}$

4 $f(x)=\sqrt[5]{x}$

5 $f(x)=3x-1$

6 $f(x)=-2x^2+3x-6$

7 $f(x)=2x^3-x^2+3x$

8 $f(\theta)=\frac{\pi}{2}\sin\theta-\cos\theta$

9 $f(x)=x^2-\frac{1}{2}\cos x$

10 $f(x)=\frac{1}{x}-3\sin x$

11 $f(x)=\frac{5}{(2x)^3}+2\cos x$

لە ڕاهێنانی 12 تا 15 خشتەکە تەواوبکە.

	نەخشە بنەڕەتییەکە	ڕێکخستنی نەخشە	داتاشراو	داتاشراوی سادەکراو
12	$f(x)=\frac{5}{2x^2}$			
13	$f(x)=\frac{\pi}{(3x)^2}$			
14	$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$			
15	$f(x)=\frac{4}{x^{-3}}$			

لە ڕاهێنانی 16 تا 25 داتاشراوی نەخشەکە بدۆزەوە.

16. $f(x)=x^2-5-3x^{-2}$
17. $f(t)=t^2-\frac{4}{t^3}$
18. $f(x)=\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}$
19. $f(x)=x(x^2+1)$
20. $f(x)=\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}$
21. $f(t)=t^{\frac{4}{5}}-t^{\frac{2}{3}}$
22. $f(x)=(x^2+4)\sqrt{x}$
23. $f(x)=x^3\cos x$
24. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$
25. $f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$

لە ڕاهێنانی 26 تا 29 خشتەکە تەواوبکە.

	$y=f(g(x))$	$u=g(x)$	$y=f(u)$
26	$y=(6x-5)^4$		
27	$y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$		
28	$y=3\tan\left(\pi x^2\right)$		
29	$y=\cos\frac{3x}{2}$		

لە ڕاهێنانی 30 تا 50 داتاشراوی نەخشەکە بدۆزەوە.

30. $f(x)=3\left(4-9x\right)^4$
31. $f(t)=\sqrt{1-t}$
32. $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$
33. $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x+2}}$
34. $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$
35. $f(t)=\sqrt{\frac{1}{t^2-2}}$
36. $f(x)=\left(\frac{x+5}{x^2+2}\right)^2$
37. $f(x)=\left(\frac{3x^2-2}{2x+3}\right)$
38. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$

$f(x)=\ln x^2$ **39**

$f(x)=x\ln x$ **40**

$f(x)=\ln\left(x\sqrt{x^2-1}\right)$ **41**

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$ **42**

$f(x)=\ln\frac{1}{x^2}$ **43**

$f(x)=\ln\sqrt{2+\cos^2 x}$ **44**

$f(x)=e^{-x^2}$ **45**

$f(x)=x^2e^{-x}$ **46**

$f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$ **47**

$f(x)=\ln e^x$ **48**

$f(x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$ **49**

$f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$ **50**

لە دوو ڕاهێنانی 51 و 52 دا هاوکێشەی لێکەوتی نەخشەکە لەخاڵە دیاریکراوەکەدا بدۆزەوە.

51 $f(x)=x^4-3x^2+2$ ؛ $(1,0)$

52 $f(x)=\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$ ؛ $(1, 2)$

لە ڕاهێنانی 53 تا 55 ئەو خاڵانە دیاربکە (ئەگەر هەبێت) کاتێک لێکەوتی نەخشەکە تێیدا ئاسۆیی بێت.

53 $f(x)=x^4-8x^2+2$

54 $f(x)=\frac{1}{x^2}$

55 $f(x)=x+\sin x$ کاتێك $0\le x\le 2\pi$

لە ڕاهێنانی 56 تا 57 بەهای k کاتێك ڕاستەهێڵەکە دەبێتە لێکەوتی نەخشەکە بدۆزەوە.

56 $f(x)=x^2-kx$ ؛ $y=4x-9$

57 $f(x)=\frac{k}{x}$ ؛ $y=-\frac{3}{4}x+3$

دەربارەی چەمکەکان

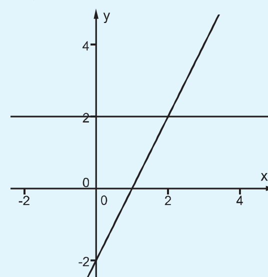
لە دوو ڕاهێنانی 58 و 59 دا ئەو پەیوەندییە بدۆزەوە کە داتاشراوی f و داتاشراوی g بەیەك دەبەستێت.

58 $g(x)=f(x)+6$

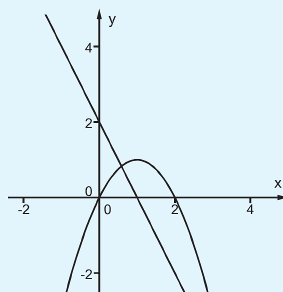
59 $g(x)=-5f(x)$

لە دوو ڕاهێنانی 60 و 61 دا وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f و وێنەی ڕوونکردنەوەی داتاشراوەکەی لەهەمان ڕووتەختی پۆوتانەکان دەردەکەوێت لەوێنەکە دەردەکەوێت، وێنەی ڕوونکردنەوەی f و f' جیابکەوە و لەبەرامبەر هەر وێنەیەك ناوەکەی بنووسە، باسیبکە چۆن گەیشتیتە دیاریکردنی وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکەو داتاشراوەکەی.

60



61



لە دوو ڕاهێنانی 62 و 63 دا پێدراوەکان بۆ دۆزینەوەی بەهای $f'(2)$ بەکاربهێنە.

$g(2)=3$ $\quad g'(2)=-2$ $\quad h(2)=-1$ $\quad h'(2)=4$

62 $f(x)=2g(x)+h(x)$

63 $f(x)=g(x)h(x)$

ڕاست یان هەڵە:

لە ڕاهێنانی 64 تا 69 دیاریبکە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە و ئەگەر هەڵەیە بەدژە نموونەیەك بیسەلمێنە.

64 ئەگەر $f'(x) = g'(x)$ ئەوا $f(x) = g(x)$.

65 ئەگەر $f(x) = g(x) + c$ ئەوا $f'(x) = g'(x)$.

66 ئەگەر $y = \pi^2$ ئەوا $\frac{dy}{dx} = 2\pi$.

67 ئەگەر $y = \frac{x}{\pi}$ ئەوا $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\pi}$.

68 ئەگەر $g(x) = 3f(x)$ ئەوا $g'(x) = 3f'(x)$.

69 ئەگەر $f(x)=\frac{1}{x^n}$ ئەوا $f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$.

70 ئەگەر نەخشەی ڕادەداری $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ هەبێت ئەومەرجانە دیاربکە کە پێویستە لە a ، b ، c ، d بێتەدی بۆ ئەوەی .

أ نەخشەکە لێکەوتی ئاسۆیی نەبێت.

ب نەخشەکە تەنها یەك لێکەوتی ئاسۆیی هەبێت.

ج نەخشەکە تەنها دوو لێکەوتی ئاسۆیی هەبێت.

بۆ هەر بارێك نموونەیەك بۆ نەخشەکە بهێنەوە.

بەشی 3

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

1–3 هەژمارکردنی داتاشراو بە بەکارهێنانی پێناسە

1 ئامانج بۆ دۆزینەوەی داتاشراوی هەر نەخشەیەك بەکاربهێنە.

أ $f(x)=2\sqrt{x}-1$

ب $f(x)=-x^2+x$

2–3 ڕێساکانی داتاشراو

2 داتاشراوی هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

أ $f(x)=2x^2-\frac{1}{2x^3}+\frac{2\sqrt{x}}{3}-1$

ب $f(x)=\frac{\cos 2x}{x^2}$

ج $f(x)=ln(1+e^x)$

د $f(\theta)=\sin\left(\pi^2\theta\right)+\cos\left(\pi\theta^2\right)$

3 $f(x)=x^3-3x$

أ هاوکێشەی لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەخاڵی بنەڕەتدا بدۆزەوە.

ب خاڵەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بدۆزەوە کە لێکەوت تێیدا ئاسۆییە.

ج ئەگەر نەخشەی $g(x)$ پاسادانی $g(1)=0$ و $g'(1)=-1$ بکات بەهای $h'(1)$ کە $h=f\circ g$ بدۆزەوە.

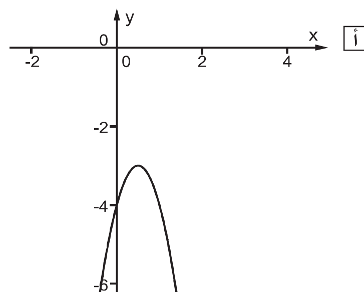
2–3 بەردەوامی

4 دیاربکە نەخشەی $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\ge 1\\ 3x-1 & x<1\end{cases}$ بەردەوامەو توانای داتاشراوی لە $x=1$ نییە.

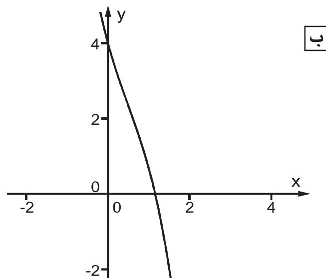
2–3 نەخشەو داتاشراوەکانی

5 دوو وێنەکەی خوارەوە وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f و داتاشراوەکەی f' دەنوێنێت.

أ



ب



أ کامیان وێنەی ڕوونکردنەوەی f و کامیان وێنەی ڕوونکردنەوەی f' دەنوێنێت؟ بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە.

ب هاوکێشەی لێکەوتی ڕوونکردنەوەی f لە $x=0$ بدۆزەوە.

3-3

داتاشراوی خۆبەخۆ و داتاشراوە بەرزەکان
Implicit Differentiation and Higher Derivative

ئامانجەکان

- جیاوازی لەنێوان نووسینی شێوەی خۆبەخۆ و نووسینی شێوەی ئاشکرا دەکات.
- داتاشراوی خۆبەخۆ بۆ دۆزینەوەی داتاشراوی نەخشە بەکاردەهێنێت.
- بارەکانی هەژمارکردنی ئامانجی نادیار جیادەکاتەوە.
- سەلمێنراوی لۆبیتال بۆ دۆزینەوەی باری ئامانجی نادیار بەکاردەهێنێت.

لەپۆلی دە شارەزای نەخشە بوویت، بینیت کە پێناسەکردنی نەخشە بەزۆری **بەشێوەی ئاشکرا** دەکرێت ئەویش بە نووسینی گۆڕاوی پەیوەستی y بەپێی گۆڕاوی **ئازادی** x وەك $y=3x^2-5$ ، بەڵام هەندێك نەخشە **بەشێوەی خۆبەخۆ** دیاریدەکرێت بە پەیوەندییەك دوو گۆڕاوەکەی پاسادان دەکەن، وەك $xy=1$ ئەگەر لەم نموونەیە داوات لێکرا داتاشراوی y وەك نەخشەیەك بەپێی x بدۆزیتەوە سەرەتا y بەپێی x دەنووسیت پاشان ڕێساکانی داتاشراو بەکاردەهێنیت.

$$xy=1 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{x}=x^{-1} \quad \Rightarrow \quad y'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$$

بەڵام نووسینی y بەپێی x هەموو کات کارێکی ئاسان نییە، بۆ نموونە پەیوەندی $x+y^3=\sqrt{x+y}$ لەم بارانەدا بۆ دۆزینەوەی y' پەنادەبەینە بەر **داتاشراوی خۆبەخۆ**.

بۆ ئەوەی داتاشراوی خۆبەخۆ تێبگەیت لەبیرت بێت داتاشراو بەپێی گۆڕاوی x وەردەگرین بۆ دۆزینەوەی y' ، پاشان ئەم هەنگاوانە پەیڕەوبکە.

- داتاشراوی هەرلایەك بەپێی گۆڕاوی x وەربگرە.
- دانانی ئەو ڕادانەی y' لەخۆدەگرێت لەلایەك و ڕادەکانی دیکە لەلایەکەی تر.
- ئەو لایەی y' لەخۆدەگرێت شیتەڵبکە.
- y' هەژماربکە بەپێی x و y.

نموونـــــە 1

داتاشراوی خۆبەخۆ

y' بدۆزەوە کە $y^2=x$.

شیکار

بە بەکارهێنانی ڕێسایەکانی داتاشراو، داتاشراوی هەرلایەکی هاوکێشەکە بەپێی گۆڕاوی x هەژماربکە، پاشان بەهای y' بدۆزەوە.

$$(y^2)'=(x)' \quad \Rightarrow \quad 2yy'=1 \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{1}{2y}$$

زاراوەکان
Vocabulary

شێوەی خۆبەخۆ
Implicit Form

شێوەی ئاشکرا
Explict form

داتاشراوی خۆبەخۆ
Implicit differentiation

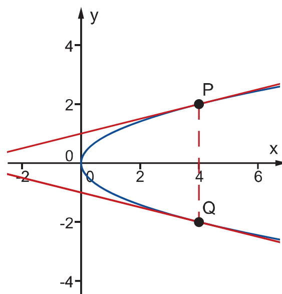
داتاشراوی دووەم
Second derivative

داتاشراوە بەرزەکان
High -Order derivative

باری نادیار
Indeterminate Form

خاڵی چاودێری

1. y' بدۆزەوە کاتێك $y^3+y^2-5y-x^2=-4$.

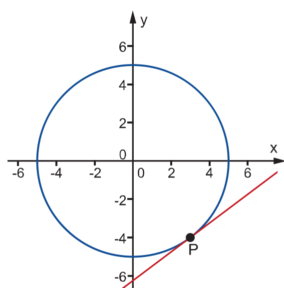


لە نموونەی 1دا ئەو برەی دەکاتە y' گۆڕاوەکانی y و x لەخۆدەگرێت ئەمە نەك هەرشیاوە بەڵکو بەسوودیشە، بۆ نموونە بۆمان دەردەخات کە ئەو وێنە ڕوونکردنەوەی پەیوەندی $y^2=x$ دەنوێنێت بریتییە لە برگەیەکی هاوتا و دوو لێکەوتی جیاوازی لە $x=4$دا هەیە، یەکەمیان لەخاڵی $(4,-2)$ و لارییەکەی $y'=\frac{1}{2(-2)}=-\frac{1}{4}$ و دووەمیان لە خاڵی $(4,2)$ و لارییەکەی $y'=\frac{1}{2(2)}=\frac{1}{4}$ زۆر جار لە داتاشراوی خۆبەخۆ بەهای y' دەستدەکەوێت وەك برێك کە x و y لەخۆدەگرێت.

نموونـــــه 2

دۆزینەوەی لاری لێکەوتی بازنە

لاری لێکەوتی بازنەی $x^2+y^2=25$ لەخاڵی $(3,-4)$ دا بدۆزەوە.



شیکار

بە بەکارهێنانی داتاشراوی خۆبەخۆ y' بدۆزەوە.

$$\left(x^2+y^2\right)'=\left(25\right)' \quad \Rightarrow \quad 2x+2yy'=0 \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{-2x}{2y}=-\frac{x}{y}$$

پاشان بەهای y'لە $x=3$ و $y=-4$ هەژماربکە.

$$y'=-\frac{3}{(-4)}=\frac{3}{4}$$

لاری لێکەوتی بازنەی $x^2+y^2=25$لەخاڵی$(3,-4)$ دەکاتە $\frac{3}{4}$.



2. لاری لێکەوتی بازنەی$x^2+y^2=16$ لەخاڵی $(0,4)$ بدۆزەوە.

تێبینیبکە داتاشراوی خۆبەخۆ سەرەڕای ئاسانی دۆزینەوەی، دەبێتە هۆی نووسینیy' بەشێوەی بڕێك کە هەژمارکردنی بەها ژمارەییەکەی لەهەر خاڵێك لە خاڵەکانی ڕوونکردنەوەکەی ئاسان بێت.

نموونـــــه 3

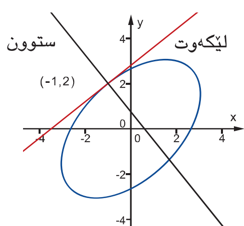
لێکەوتی بڕگەی ناتەواو و ئەستوون لەسەری

لاری لێکەوتی بڕگەی ناتەواوی$x^2-xy+y^2=7$ ولاری ئەستوون لەسەری لەخاڵی$(-1, 2)$ بدۆزەوە.

شیکار

بە بەکارهێنانی داتاشراوی خۆبەخۆ y' بدۆزەوە.

$$\left(x^2-xy+y^2\right)'=\left(7\right)' \Rightarrow 2x-y-xy'+2yy'=0 \Rightarrow (2y-x)y'=y-2x \Rightarrow y'=\frac{y-2x}{2y-x}$$



پاشان بەهای y' بدۆزەوە کاتێك$x=-1$ و $y=2$

$$y'=\frac{(2)-2(-1)}{2(2)-(-1)}=\frac{4}{5}$$

لاری لێکەوت دەکاتە $\frac{4}{5}$ ولاری ئەستوون لەسەری دەکاتە $-\frac{5}{4}$.



3. لاری لێکەوتی بڕگەی ناتەواوی $4x^2-8xy+9y^2=16$ ولاری ئەستوون لەسەری لەخاڵی$(-2, 0)$ بدۆزەوە.

داتاشراوە بەرزەکان

ئەگەر f نەخشەیەك بێت توانای داتاشراوی هەبێت، ئەوا داتاشراوەکەش نەخشەیە و لەوانەیە توانای داتاشراوی هەبێت، ئەگەر داتاشراوەکە f' نەخشەیەك بێت توانای داتاشراوی هەبێت ئەوا بە داتاشراوەکەی دەوترێت داتاشراوی **دووەمی نەخشەی** f و بەهێمای f'' هێمادەکرێت لەم بارەدا بە f' دەوترێت **داتاشراوی یەکەم**.

داتاشراوی دووەم بە نموونەیەك لە **داتاشراوە بەرزەکان** دادەنرێت دەتوانیت هەژماری داتاشراوی نەخشە لەهەر پلەیەك بکەیت (ئەگەر هەبێت) لەبەرئەوە داتاشراوی سێیەم بریتییە لە داتاشراوی داتاشراوی دووەم، داتاشراوە بەرزەکانی نەخشەی $y = f(x)$ دەکاتە:

داتاشراوی یەکەم	y'	$f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d}{dx}[f(x)]$
داتاشراوی دووەم	y''	$f''(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$
داتاشراوی سێیەم	y'''	$f'''(x)$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$
داتاشراوی چوارەم	$y^{(4)}$	$f^{(4)}(x)$	$\frac{d^4y}{dx^4}$	$\frac{d^4}{dx^4}[f(x)]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
داتاشراوی پلەی n	$y^{(n)}$	$f^{(n)}(x)$	$\frac{d^ny}{dx^n}$	$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)]$

نموونە 4 دۆزینەوەی داتاشراوە پلە بەرزەکان

داتاشراوی سێیەمی نەخشەی $f(x) = x\sin x$ بدۆزەوە.

شیکار

داتاشراوی یەکەم $f'(x) = (x\sin x)' = \sin x + x\cos x$

داتاشراوی دووەم $f''(x) = (\sin x + x\cos x)' = \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - x\sin x$

داتاشراوی سێیەم $f'''(x) = (2\cos x - x\sin x)' = -2\sin x - \sin x - x\cos x = -3\sin x - x\cos x$



4. داتاشراوی سێیەمی نەخشەی $f(x) = x\cos x$ بدۆزەوە.

نادیاری لە ئامانجی نەخشە

لەهەژمارکردنی ئامانجەکان لەو بارانەی کە ئامانج بەشێوەی $\frac{0}{0}$ یان $\frac{\infty}{\infty}$ دەردەکەوێت تۆ لەبەرامبەر بارێك لەبارەکانی **ئامانجی نادیاری**، لەپێشتر هەوڵتدا نادیاری ئامانج بەجەبری لاببەیت بە دووبارە نووسینەوەی نەخشەکە بەشێوەیەك نادیارەکەی نەمێنێت.

نموونە 5 لابردنی نادیاری لە هەژمارکردنی ئامانج

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x-\sqrt{x}}$ بدۆزەوە.

شیکار

ئاشکرایە جێبەجێکردنی ڕێسای دابەش بۆ هەژمارکردنی ئەو ئامانجە دەبێتە بارێکی نادیاری وەك $\frac{0}{0}$ ، دەتوانین دووبارە نەخشەکە بنووسینەوە و ئامانجەکەی بەم شێوەییەی خوارەوە هەژماربکەین.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(x+\sqrt{x}\right)}{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(x+\sqrt{x}\right)}{x^2-x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{x}}{x-1} = 0$$



.5 $\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-2}{x+1}$ بدۆزەوە.

بەکارهێنانی جەبر بۆ لابردنی باری نادیار لەزۆر باردا کارێکی ئاسان نییە بۆ، نموونە $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ لەم بارەدا پەنا بۆ بەکارهێنانی سەلمێنراوی لۆبیتاڵ دەبەین.

سەلمێنراوی 3-8 سەلمێنراوی لۆبیتاڵ

f و g دوو نەخشەن توانای داتاشراویان لە هاوسێیەکانی $x=c$ هەیە $g'(x) \neq 0$ ئەگەر $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ لەباری نادیاری $\frac{0}{0}$ یان $\frac{\infty}{\infty}$ ئەوا.

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

نموونە 6 بەکارهێنانی سەلمێنراوی لۆبیتاڵ

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ بدۆزەوە.

شیکار

ئاشکرایە جێبەجێکردنی ڕێسای دابەش دەبێتە باری نادیار $\frac{0}{0}$.

سەلمێنراوی لۆبیتاڵ بەکاربێنە.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$



.6 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ بدۆزەوە.

ئەمەش بارێکی ترە لە بارەکانی نادیار لەشێوەی $\frac{\infty}{\infty}$ لەم بارەشدا سەلمێنراوی لۆبیتاڵ جێبەجێدەکەین.

نموونە 7 باری $\frac{\infty}{\infty}$.

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$ بدۆزەوە.

شیکار

ئاشکرایە جێبەجێکردنی ڕێسای دابەش دەبێتە باری نادیاری $\frac{\infty}{\infty}$ چونکە $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$.

سەلمێنراوی لۆبیتاڵ.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



.7 $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x}$ بدۆزەوە.

لەوانەیە سەلمێنراوی لۆبیتاڵ زیاتر لە جارێك بەکاربهێنێت.

نموونە 8 جێبەجێ کردنی لۆبیتاڵ زیاتر لە جارێك

$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}}$ بدۆزەوە.

شیكار

ئاشكرایە جێبەجێكردنی ڕێسای ئەنجامی دابەش دەبێتە باری نادیاری $\frac{\infty}{\infty}$ چونكە $\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}\right)=+\infty$ سەلمێنراوی لۆبیتاڵ بەكاربهێنە.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}\to\frac{\infty}{\infty}$$

سەلمێنراوی لۆبیتاڵ جارێكی تر بەكاربهێنە.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x)'}{\left(-e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=0$$



8. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$ بدۆزەوە.

3-3 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تا 4 y' بدۆزەوە بەپێی y ، x .

1 $x^2y+xy^2=6$ **2** $y^2=\frac{x-1}{x+1}$ **3** $x=\tan y$ **4** $x+\tan(xy)=0$

لە دوو ڕاهێنانی 5 و 6 دا، y'ولاری چەماوەكە لەخاڵی دیاریكراو بدۆزەوە.

5 $x^2+y^2=13$ ؛ $(-2,3)$ **6** $(x+2)^2+(y+3)^2=25$ ؛ $(1,-7)$

لە دوو ڕاهێنانی 7 و 8 دا دیاربكە كەی لاری چەماوەكە پێناسەكراو دەبێت.

7 $x^2y-xy^2=4$ **8** $x^3-y^3=xy$

لە ڕاهێنانی 9 تا 12 لاری لێكەوت و ئەستوون لەسەری لەخاڵی دیاریكراو بدۆزەوە.

9 $x^2+xy-y^2=1$ $(2,3)$ **10** $x^2y^2=9$ $(-1,3)$

11 $6x^2+3xy^2+2y^2+17y-6=0$ $(-1,0)$ **12** $y=2\sin(\pi x-y)$ $(1,0)$

لە ڕاهێنانی 13 تا 18 داتاشراوی دووەمی نەخشەكە بدۆزەوە.

13 $f(x)=4x^{\frac{3}{2}}$ **14** $f(x)=x+32x^{-1}$ **15** $f(x)=\frac{x}{x-1}$

16 $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x}$ **17** $f(x)=3\sin x$ **18** $f(x)=\frac{1}{\cos x}$

لە ڕاهێنانی 19 تا 22 داتاشراوی داواكراو بۆ نەخشەكە بدۆزەوە كە یەكێك لە داتاشراوەكەی دراوە.

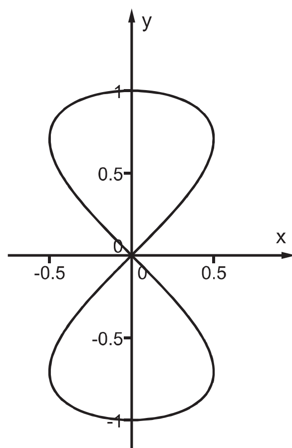
19 $f'(x)=x^2$: $f''(x)$ بدۆزەوە. **20** $f''(x)=2-\frac{2}{x}$: $f'''(x)$ بدۆزەوە.

21 $f'''(x)=2\sqrt{x}$: $f^{(4)}(x)$ بدۆزەوە.

22 $f^{(4)}(x)=2x+1$: $f^{(6)}(x)$ بدۆزەوە.

23 **ڕوونکردنەوەی هەشتی**

چەماوەی بەرامبەر هاوکێشەی $y^4 = y^2 - x^2$ دەنوێنێت، دوو لاری ئەو چەماوەییە لە خاڵەکانی $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$ بدۆزەوە.



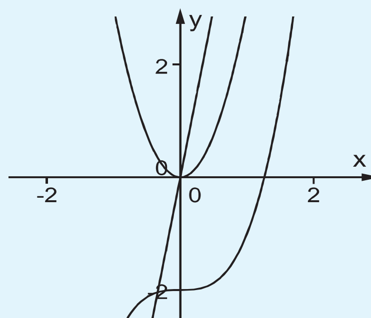
دەربارەی چەمکەکان

24 جیاوازی نێوان شێوەی خۆبەخۆ و شێوەی ئاشکرا لە پێناسەی پەیوەندی نێوان x و y ڕوونبکەوە، نموونە بۆ هەر یەکێکیان بهێنەوە.

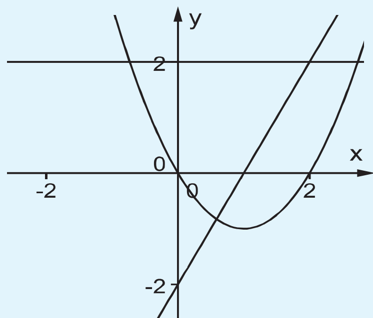
25 بەشێوازی خۆت لەسەر هەنگاوەکانی داتاشراوی خۆبەخۆ باسێك بنووسە.

لە دوو ڕاهێنانی 26 و 27 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f و ڕوونکردنەوەی داتاشراوی یەکەم f' و داتاشراوی دووەم f'' دەردەکەوێت، دیاربکە کام لەم سێ ڕوونکردنەوانە ڕوونکردنەوەی نەخشەکەیە وکامیان وێنەی ڕوونکردنەوەیی داتاشراوی یەکەمە و کامیان ڕوونکردنەوەیی داتاشراوی دووەمە، دیاربکە چۆن ڕوونکردنەوەکانت دۆزییەوە.

26



27



ڕاست یان هەڵە؟ **لە ڕاهێنانی 28 تا 30 دیاربکە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە یان ئەگەر هەڵەیە بە دژە نموونەیەك بیسەلمێنە.**

28 ئەگەر $y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ ئەوا $\frac{d^5y}{dx^5} = 0$.

29 ئەگەر f نەخشەیەکی ڕادەدار بێت لەپلەی n ئەوا $f^{(n+1)}(x) = 0$.

30 داتاشراوی دووەمی نەخشە، تێکرای گۆڕانی داتاشراوی یەکەم دەنوێنێت.

31 داتاشراوی یەکەمی نەخشەی $f(x) = x|x|$ بدۆزەوە، ئایا $f''(0)$ پێناسەکراوە؟

32 **بیربکەوە** f و g دوو نەخشەن توانای داتاشراویان هەیە لەهەر بەهایەك لە بەهایەکانی x .
کام لەوانە دێن ڕاستە؟

أ $fg'' - f''g = (fg' - f'g)'$

ب $fg'' + f''g = (fg)''$

لە ڕاهێنانی 33 تا 35 یەکەمجار بە دووبارە نووسینەوەی نەخشەکەو پاشان بە بەکارهێنانی سەلمێنراوی لۆبیتاڵ ئامانج بدۆزەوە.

33 $\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{x^2-9}$

34 $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-x-3}{x+1}$

35 $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

لە ڕاهێنانی 36 تا 44 ئامانج بدۆزەوە.

36 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}$

37 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}$

38 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1-x)}{x}$

39 $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x^2}{x^2-1}$

40 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$

41 $\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2-2x+1}{2x^2+3}$

42 $\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

43 $\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$

44 $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x^4}{x^3}$

دەربارەی چەمکەکان

45 ئەگەرL لێکەوتی چەماوەی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{c}$ بێت. بسەلمێنە سەرجەمی یەکتربڕینی ئەو ڕاستەهێڵە لەگەڵ تەوەری پۆوتانەکان دەکاتە c .

46 داتاشراوی خۆبەخۆ بەکاربهێنە بۆ ئەوەی بیسەلمێنێت داتاشراوی $f(x)=x^{\frac{p}{q}}$ کە $\frac{p}{q}$ ژمارەیەکی ڕێژەییە دەکاتە $f'(x)=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$

47 نەخشەی خێرایی$\mathrm{m/s}$ تەنێکی جووڵاو دەکاتە $v(t)=36-t^2$ مەتر لە چرکەیەکدا کە $0\le t\le 6$. خێرایی و تاودانی تەنەکە لە$t=3$ بدۆزەوە، کاتێك خێرای وتاودان لە نیشانەدا دژ بن خێرایی تەنەکە چ دەگەینێت؟

48 تۆ دەزانیت کە ڕاستەهێڵی ئەستوون لەسەر لێکەوتی بازنە لەخاڵی لێکەوت بەچەقی بازنەکەدا دەڕوات، ئەمە بە بەکارهێنانی بازنەی $x^2+y^2=r^2$و خاڵێکی سەری $P(a,b)$ بسەلمێنە.

أ هاوکێشەی لێکەوتی بازنەکە لەخاڵی P دا بدۆزەوە.

ب هاوکێشەی ڕاستەهێڵی ئەستوون لەسەر لێکەوتەکە لەخاڵی P دا بدۆزەوە، وبسەلمێنە بەچەقی بازنەکەدا دەڕوات.

4–3 تێکڕای گۆڕانەکان
Rates of Change

ئامانجەکان

- داتاشراو بۆ دۆزینەوەی تێکڕای گۆڕانەکان بەکاردەهێنێت.
- تێکڕای گۆڕانەکان بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانە بەکاردەهێنێت.

زاراوەکان
Vocabulary

نەخشەی لادان
Position function

خێرایی ئاڕاستەکراو
Velocity

بڕی خێرایی
Speed

ناوەندە خێرایی
Average velocity

خێرایی ساتی
Instantaneous velocity

تێکڕای گۆڕان
Rate of change

تێکڕای گۆڕانەکان

فێربوویت چۆن داتاشراو بۆ دۆزینەوەی لاری لە خاڵێك لە خاڵەکانی ڕوونکردنەوەکەی بەکاربهێنێت، لەم وانەیەدا فێردەبیت چۆن داتاشراو بۆ دۆزینەوەی تێکڕای گۆڕان بۆ گۆڕاوێکی دیاریکراو بەپێی گۆڕاوێکی تر بەکاردەهێنیت،

تێکڕای گۆڕانەکان لەزۆر بوار بەکاردێت وەك لێکۆڵینەوەی زیادبوونی ژمارەی دانیشتوان و تێکڕای بەرهەمهێنان و تێکڕای دەرچوونی ئاو و خێرایی و تاودان.

لێکۆڵینەوەی جوڵانی تەنێك لەسەر ڕاستەهێڵێکی (ئاسۆیی یان ستوونی)، دیارترین بەکارهێنانەکانی تێکڕای گۆڕانە، تەوەری ئاسۆیی و خاڵی بنەڕەتی سەر تەوەرەکە زۆربەی جار بەکاردەهێنرێت وەك نموونەی ڕاستەهێڵێك کە تەنێك بە ئاسۆیی لەسەری دەجوڵێت. لەم بارەدا جوڵانەکە بە ئاڕاستەی موجەب دادەنرێت ئەگەر لە چەپەوە بۆ ڕاست بێت و ئاڕاستەکەی بە سالب دادەنرێت ئەگەر لە ڕاستەوە بۆ چەپ بجوڵێت،

نەخشەی لادان بریتییە لە نەخشەی s کە شوێنی تەنێك لەخاڵی بنەڕەت بەپێی کات t دیاریدەکات ئەگەر تەنەکە لەماوەی Δt دووری $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$ ببڕێت ئەوا بەرێژەی:

$$\frac{\text{گۆڕانی لادان}}{\text{گۆڕانی کات}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

دەوترێت **ناوەندە خێرایی Average velocity** تەنێکی جوڵاو یان ناوەندە خێرایی لەماوەی $[t, t+\Delta t]$

جوڵەی ئاسۆیی

داتاشراو ڕۆڵێکی گرنگ لە لێکۆڵینەوەی جوڵانی تەنەکان دەبینێت، کاتێك تەنێك دەجوڵێت ئەوا شوێنەکەی بە گۆڕانی کات دەگۆڕێت، ئەگەر بە ئۆتۆمبێلەکەت لەهەولێر بۆ دهۆك دەربچیت ئەوا شوێنەکەت لەهەر ساتێك بەپێی نەخشەی لادانی $s(t)$ دیاریدەکرێت،

وادابنێ تەنێك لەسەر ڕاستەهێڵێکی ئاڕاستەکراو دەجوڵێت کە دەتوانرێت بە تەوەری x دابنرێت تەنەکە لەماوەی t بۆ $t_1 = t+\Delta t$ لە شوێنی $s(t)$ بۆ شوێنی $s(t_1) = s(t+\Delta t)$ دەجوڵێت.

تێکڕای خێرایی بۆ ئەو تەنە لەماوەی $[t, t_1]$ دەبێتە:

$$v_{av} = \frac{\text{گۆڕانی شوێن}}{\text{گۆڕانی کات}} = \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

کاتێك $\Delta(s) = s(t+\Delta t) - s(t)$.

ئەگەر بتەوێت خێرایی تەنەکە لە ساتی t بدۆزیتەوە ئەوا بەدوای $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ بگەڕێ، واتە بەهای داتاشراوی نەخشەی لادان لە ساتی t بدۆزەوە.

خێرایی ساتی Instantaneous Velocity

خێرایی ساتی تەنێکی جوڵاو دەکاتە داتاشراوی نەخشەی لادانی جوڵانی ئەو تەنە لەساتی t دا

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=s'(t)$$

نموونــــــــە 1

هەژمارکردنی خێرایی ساتی تەنێك لەسەر تەوەرەیەك دەجوڵێت

خاڵێك لەسەر تەوەری x دەجوڵێت. نەخشەی $s(t)=t^2-5t+4$ لادانی تەنەکە دەنوێنێت کات t بە چرکەو لادان s بە مەتر دەپێورێت، ناوەندە خێرایی خاڵەکە لەماوەی دوو چرکەی یەکەمدا بدۆزەوە پاشان خێرایی ساتی لە $t=2$ بدۆزەوە.

شیکار

بۆ دۆزینەوەی ناوەندە خێرایی خاڵەکە لەماوەی دوو چرکەی یەکەمدا ئەو دوورییەی خاڵەکە لەو ماوەیەدا بڕیوەتی بدۆزەوە ئەو دووریە دەکاتە.

$$s(2)-s(0)=(2)^2-5(2)+4-\left[(0)^2-5(0)+4\right]=4-10=-6$$

خاڵەکە لەماوەی دوو چرکەدا، 6 مەتری بە ئاڕاستەی سالب لەسەر تەوەرەکە بڕیوە، بۆیە ناوەندە خێرایی دەبێتە 3 مەتر لە چرکەیەکدا بە ئاڕاستەی سالب $-3\text{m}/\text{s}$، بۆ دۆزینەوەی خێرایی ساتی خاڵەکە لە $t=2$ بەهای داتاشراوەکە $s'(t)$ لە $t=2$ بدۆزەوە.

$$s'(t)=2t-5 \quad \text{و} \quad s'(2)=2(2)-5=-1 .$$

تێبینی بکە ئەو خێراییەی دۆزیتەوە تەنها ئەو خێراییە ناگەیەنێت کە خاڵەکە پێی دەجوڵێت، بەڵکو ئاڕاستەکەشی دیاریدەکات، بۆیە پێی دەوترێت **خێرایی ئاڕاستەکراو**.
بەڵام بڕی خێراییەکە بەهای ڕووتی خێراییە ئاڕاستەکراوەکەیە بۆیە خێرایی ئاڕاستەکراوی خاڵەکە لە $t=2$ دەکاتە $-1\text{m}/\text{s}$ یان یەك مەتر لەچرکەیەکدا بە ئاڕاستەی سالبی تەوەرەکە، وبڕی خێراییەکە دەکاتە یەك مەتر لە چرکەیەکدا.



1. ناوەندە خێرایی ئاڕاستەکراوی خاڵێك لەماوەی $t_1=3$ بۆ $t_2=7$ چەندە؟ خێرایی ساتی ئاڕاستەکراو لە $t=5$ چەند بووە؟ $s(t)=t^2-5t+4$

خێرایی نەخشەیەکە بەپێی کات و بە تێپەڕبوونی کات دەگۆڕێت، داتاشراوی خێرایی چۆنیەتی گۆڕان دەگەیەنێت، وەك چۆن خێرایی گۆڕانی شوێن دەگەیەنێت، داتاشراوی خێرایش چۆنیەتی گۆڕانی خێرایی دەگەیەنێت، تاودان بریتییە لە داتاشراوی خێرایی، بۆ دۆزینەوەی تاودان دووجار داتاشراوی نەخشەی لادان وەربگرە، واتە داتاشراوی دووەمی نەخشەی لادان بدۆزەوە.

نەخشەی لادان	$s(t)$
نەخشەی خێرایی	$v(t)=s'(t)$
نەخشەی تاودان	$a(t)=v'(t)=s''(t)$

نموونـــه 2 هەژمارکردنی تاودانی تەنێك لەسەر تەوەرەیەك دەجوڵێت

بە گەڕانەوە بۆ پێدراوەکانی نموونە 1 ، تاودانی خاڵەکە لە $t = 5$ بدۆزەوە.

شیکار

بۆ دۆزینەوەی تاودانی خاڵەکە داتاشراوی دووەمی نەخشەی لادان بدۆزەوە.

$$v(t) = s'(t) = 2t - 5$$

$$a(t) = s''(t) = 2$$

تاودانی تەنەکە جێگیرە و ناگۆڕێت و دەکاتە $2\text{m}/\text{s}^2$.



2. تاودانی خاڵەکە لە t=6 چەندە؟ $s(t)=t^2-5t+4$

جوڵەی ستوونی

نەخشەی لادان لە جوڵەی ستوونی بەرزی تەنێك لە ڕووی زەوی دەنوێنێت، بە وادانان کە تەنەکە لەسەر ڕاستەهێڵێکی ستوونی بۆ سەرەوە ئاڕاستەکراوە دەجوڵێت، دەتوانرێت بە تەوەری y دابنرێت لە ئەنجامی توێژینەوە تاقیکردنەوەییەکان و تیۆرییەکان دەرکەوتووە کە نەخشەی. $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$

نەخشەیەك دەنوێنێت بۆ توێژینەوەی بەرزی تەنێك لەڕووی زەوییەوە بە تێپەڕبوونی کات t لەساتی دەرچوونیدا پاش فڕێدانی لەبەرزی سەرەتای s_0 بەخێرایی سەرەتایی v_0 ، g لەو نەخشەیە تاودانی زەوی دەنوێنێت، بەهایەکەی جیاواز دەبێت بە جیاوازی یەکەی بەکارهاتوو بۆ پێوانی دوورییەکە.

نەخشەی جولەی ستوونی

یەکەی پێوانی دووری	یەکەی پێوانی خێرایی	بەهای g	نەخشەکە
مەتر m	m/s	$g = 9.8m/s^2$	$s(t) = -4.9t^2 + v_0t + s_0$
پێ ft	ft/s	$g = 32ft/s^2$	$s(t) = -16t^2 + v_0t + s_0$

نموونـــه 3 بەکارهێنانی داتاشراو بۆ دۆزینەوەی خێرایی

لە ئاهەنگێکی یاری ئاگریندا تیرێك لەسەر پایەیەك کە 4 پێی لەسەر ڕووی زەوی بەرزە بەرەو سەرەوە هەڵدرا بەخێرایی سەرەتایی برەکەی 160 پێ لە چرکەیەکدا.

أ نەخشەی لادانی جوڵەی تیرەکە بنووسە.

ب ئەوپەڕی بەرزی تیرەکە دەیگاتێ چەندە؟

ج خێرایی ئاڕاستەکراوی تیرەکە کاتێك دەگاتە بەرزی 260 پێ لەبەرزبوونەوە و هاتنە خوارەوەیدا چەندە؟

د تاودانی تیرەکە لەهەر ساتێکدا چەندە؟

هـ کەی تیرەکە دەکەوێتەوە سەر زەوی؟

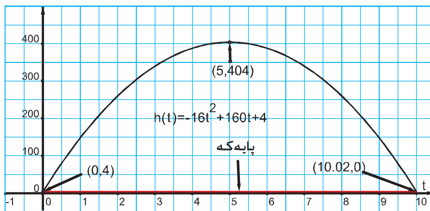
شیکار

أ بەپێی زانیارییەکانی پێشوو، نەخشەی لادانی جوڵەی تیرەکە دەبێتە $s(t) = -16t^2 + 160t + 4$

ب کاتێك خێرایی تیرەکە دەبێتە سفر تیرەکە دەگاتە ئەوپەڕی بەرزی، خێرایی ئاڕاستەکراوی تیرەکە بەپێی کات دەکاتە $v(t) = s'(t) = -32t + 160$. ئەو خێراییە دەبێتە سفر کاتێك بەهای t دەبێتە ڕەگی هاوکێشەی $-32t + 160 = 0$ واتە $t = 5$ ، لەمەوە دەردەچێت ئەوپەڕی بەرزی تیرەکە دەیگاتێ دەکاتە $s(5) = -16(5)^2 + 160(5) + 4 = 404\,\text{ft}$.

ج بۆ دۆزینەوەی خێرایی ئاڕاستەکراوی تیرەکە کاتێك بەرزییەکەی دەبێتە 260 پێ، پێویستە بەهای v لەو بەرزییەدا بدۆزێتەوە

هاوکێشەی $-16t^2 + 160t + 4 = 260$ شیکاربکە.



$$-16t^2 + 160t + 4 = 260$$
$$16t^2 - 160t + 256 = 0$$
$$16(t-2)(t-8) = 0$$

ئەم هاوکێشە دوو ڕەگی هەیە $t = 2$ و $t = 8$، بەرزی تیرەکە دەگاتە 260 پێ لە کاتی بەرزبوونەوەیدا لە $t = 2$ کە تێیدا خێراییە ئاڕاستەکراوەکەی دەبێتە بەهای داتاشراوی نەخشەکە، واتە $v(2) = -32(2) + 160 = 96\,\text{ft/s}$ هەروەها تیرەکە دەگاتە ئەو بەرزییە لەهاتنە خوارەوەیدا کاتێك $t = 8$ تێیدا خێرایی ئاڕاستەکراو دەکاتە $v(8) = -32(8) + 160 = -96\,\text{ft/s}$، ئەگەر تێبینی هەردوو خێرایی تیرەکە لەبەرزبوونەوە و هاتنە خوارەوەیدا لەبەرزی 260 بکەین لە بڕدا یەکسانن و خێراییەکە لە بەرزبوونەوەدا موجەب و لەهاتنە خوارەوەیدا سالبە.

د بۆ دۆزینەوەی تاودانی تیرەکە داتاشراوی دووەمی نەخشەی لادان بدۆزەوە $a(t) = s''(t) = -32$ تێبینیبکە تاودانی تیرەکە لەهەر ساتێك ناگۆڕێت و سالبە.

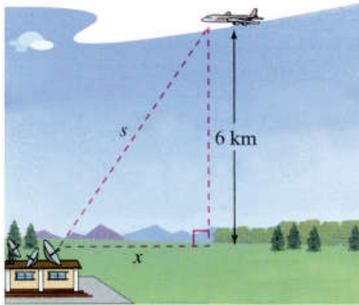
هـ تیرەکە دەگاتەوە زەوی کاتێك بەرزییەکەی دەبێتە 0 واتە کاتێك هاوکێشەی $-16t^2 + 160t + 4 = 0$ دوو ڕەگی هەیە، یەکێکیان سالبە ئەمەش نابێت و ئەویتریان موجەبە و دەکاتە 10 بەنزیکەیی. تیرەکە دەگاتەوە زەوی پاش نزیکەی 10 چرکە لە هەڵدانی.



3. وەڵامی پرسیارەکانی نموونەی 3 بدەوە ئەگەر وادانرا تیرەکە لەبەرزی 2.4m هەڵدرا بەخێرایی سەرەتایی 49m/s و لەپرسیاری لقی ج خێرایی ئاڕاستەکراوی تیرەکە کاتێك لەبەرزی 120 m بێت بدۆزەوە؟

لە جێبەجێکردنە گرنگەکانی داتاشراوی خۆبەخۆ دۆزینەوەی تێکرایی گۆڕانی گۆڕاوێکە بەپێی گۆڕاوێکی تر کاتێك هەردووکیان نەخشە بن بەپێی کات.

نموونـــــە 4 دۆزینەوەی خێرایی فڕۆکە بەهۆی ڕادار «بۆ تێڕوانین»



فڕۆکەیەك بە هێڵێکی ئاسۆیی بەسەر وێستگەی ڕادارێك تێپەڕدەبێت، وەك لەوێنەی بەرامبەرڕوونکراوەتەوە خێرایی ئاڕاستەکراوی فڕۆکەکە چەندە کاتێك لە دووری $s = 10\text{km}$ لەوێستگەی ڕادارەکە دوورە، ئەگەر زانیت دوورییەکەی s بە تێکرایی 400 km/h کەمبکات؟

شیکار

خێرایی ئاڕاستەکراوی فڕۆکەکە بەتێکڕای گۆڕانی دووری ئاسۆیی نێوان فڕۆکەکە و شوێنی ڕادارەکە دەپێورێت، نەخشەی $x(t)$ دەبێتە نەخشەی لادانی فڕۆکەکە بۆیە داتاشراوی $x(t)$ بدۆزەوە.

لەلایەکی تر گۆڕاوەکانی x و t بە پەیوەندی $x^2+6^2=s^2$ بەیەك دەبەسترێنەوە داتاشراوی خۆبەخۆ بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی $x'(t)$.

$$x^2+6^2=s^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}(x^2+6^2)=\frac{d}{dt}(s^2) \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt}=2s\frac{ds}{dt} \Rightarrow x\frac{dx}{dt}=s\frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{s}{x}\frac{ds}{dt}$$

کاتێك فڕۆکەکە لە دووری $s=10\text{km}$ ، ئەوا $x=\sqrt{10^2-6^2}=8$ و $\frac{ds}{dt}=-400$

لەوە دەردەچێت $\frac{dx}{dt}=\frac{s}{x}\frac{ds}{dt}=\frac{10}{8}(-400)=-500$

خێرایی ئاڕاستەکراوی فڕۆکەکە، کاتێك 10 km لەوێستگەی ڕادارەکە دوورە دەکاتە -500km/h کەواتە بڕی خێراییەکەی لەو ساتەدا دەبێتە 500 km/h.

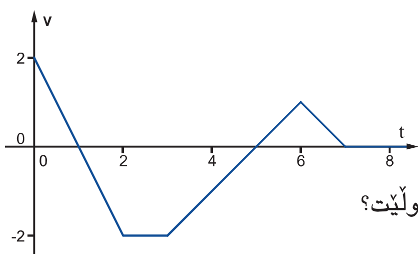


4. فڕۆکەیەك لەسەر هێڵێکی فڕین کەبەسەر وێستگەی ڕادارێك تێپەڕدەبێت دەفڕێت وەك لە وێنەکەی نموونە 4 تێکڕای کەمکردنی دووری s چەندە؟ ئەگەر زانیت خێرایی ئاڕاستەکراوی فڕۆکەکە لە دووری $s=9\text{km}$ بێت لە وێستگەی ڕادارەکە بکاتە -450km/h .

4-3 ڕاهێنان

1 **ڕووبەر** لاکێشەیەك درێژییەکەی $2t+1$ و پانییەکەی $\sqrt{t}$ بێت، تێکرای گۆڕانی ڕووبەری لاکێشەکە بە گۆڕانی t بدۆزەوە.

2 **قەبارە** لولەکێکی وەستاو نیوەتیرەی بنکەکەی $\sqrt{t+2}$ و بەرزییەکەی $\frac{1}{2}\sqrt{t}$ بێت، تێکرای گۆڕانی قەبارەی لولەکەکە بە گۆڕانی t بدۆزەوە.



3 **جوولەی ئاسۆیی** لەوێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $v=f(t)$ دەردەکەوێت کە خێرایی ئاڕاستەکراوی خاڵێك لەسەر تەوەری x دەنوێنێت.

أ کەی خاڵەکە بۆ دواوە دەجولێت؟ کەی بۆ پێشەوە دەجولێت؟ کەی خێراییەکەی زیاددەکات و کەی کەمدەکات؟

ب کەی تاودانی خاڵەکە موجەب، سالب، سفر دەبێت؟

ج کەی خاڵەکە بەئەوپەڕی خێرایی دەجوولێت؟

د کەی خاڵەکە بۆ ساتێك زیاتر لە جولەوە دەوەستێت؟

وا دابنێ کە x و y دوو نەخشەن بەپێی t و توانای داتاشراویان هەیە، بە بەکارهێنانی پێدراوەکە داواکراوەکەی بدۆزەوە.

	پەیوەندی نێوان x و y	داواکراوەکە	پێدراوەکە
4	$y=\sqrt{x}$	$\frac{dy}{dt}$ لە $x=4$.	$\frac{dx}{dt}=3$
5	$x^2+y^2=25$	$\frac{dy}{dt}$ لە $x=3$ و $y=4$. $\frac{dx}{dt}$ لە $x=4$ و $y=3$.	$\frac{dx}{dt}=8$ $\frac{dy}{dt}=-2$

لە دوو ڕاهێنانی 6 و 7 دا خاڵێك لەسەر چەماوەی نەخشەی y کە دراوە دەجوولێت. $\frac{dy}{dt}$ بۆ هەر بەهایەکی دیاریکراو بۆ x بدۆزەوە، ئەگەر زانیت لە $\frac{dx}{dt}=2\text{cm}/\text{s}$.

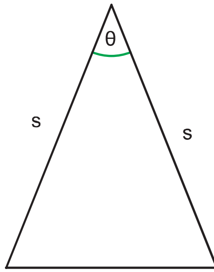
6 $y=x^2+1$ ، $x=-1$ ، $x=0$ ، $x=1$

7 $y=\sin x$ ، $x=\frac{\pi}{6}$ ، $x=\frac{\pi}{4}$ ، $x=\frac{\pi}{3}$

8 تێکرای گۆڕانی دووری نێوان خاڵێك لەسەر برگەی هاوتای $y=x^2+1$ دەجولێت وخاڵی بنەڕەت بدۆزەوە، ئەگەر زانیت کە $\frac{dx}{dt}=2\text{cm}/\text{s}$.

9 تێکرای گۆڕانی دووری نێوان خاڵێك لەسەر چەماوەی نەخشەی $y=\sin x$ دەجولێت وخاڵی بنەڕەت بدۆزەوە ئەگەر زانیت کە $\frac{dx}{dt}=2\text{cm}/\text{s}$.

10 سێگۆشەیەکی دوولا یەکسان درێژی لایەك لە دوولا یەکسانەکەی s و گۆشەی نێوانیان θ بێت.



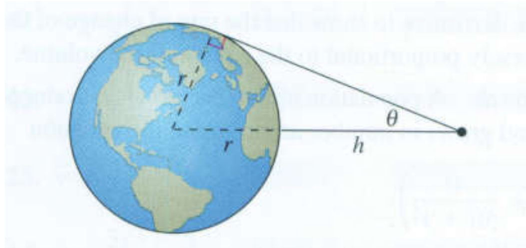
أ بیسەلمێنە ڕووبەری سێگۆشەکە دەکاتە $A = \frac{1}{2}s^2 \sin\theta$.

ب ئەگەر θ بەتێکڕای $\frac{1}{2}$ ڕادیان لە خولەکێکدا زیادبکات، تێکڕای گۆڕانی ڕووبەری سێگۆشەکە لە $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ بدۆزەوە.

ج ڕوونبکەوە بۆچی تێکڕای گۆڕانی ڕووبەری سێگۆشەکە جێگیر نییە، لەکاتێکدا تێکڕایی گۆڕانی θ بە جێگیری دەمێنێتەوە.

11 **تێکڕای گۆڕان** تێکڕای گۆڕانی بەهایەك بۆ x ئەگەر هەبوو لەماوەی $[0,2\pi]$ بدۆزەوە، کەتیایدا تێکڕای گۆڕانی هەریەك لە نەخشەکانی $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ و $g(x) = \frac{1}{\sin x}$ یەکسان بن.

12 کاتێك مانگێکی دەستکرد چاودێری گۆی زەوی دەکات، چاودێری بەشێکی دەکات، هەندێك لەو مانگە دەستکردانە لە توانایدایە گۆشەی θ کە لەوێنەی خوارەوە ڕوونکراوەتەوە بپێوێت کە h دووری نێوان مانگە دەستکردەکەو زەوی دەنوێنێت و r نیوەتیرەی گۆی زەوی دەنوێنێت.



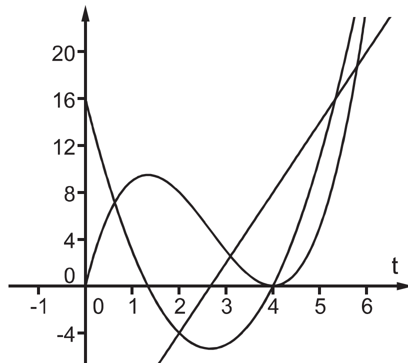
أ بیسەلمێنە کە $h = r\left(\frac{1}{\sin\theta} - 1\right)$

ب تێکڕای گۆڕانی h بەپێی θ لە $\theta = 30^\circ$ $r = 6373\text{km}$ بدۆزەوە.

دەربارەی چەمکەکان

13 گۆڕاوی x و y بە پەیوەندی $y = ax + b$ بەیەکدەبەسترینەوە کە a و b دوو ژمارەی ڕاستین وادابنێ هەریەك لە گۆڕاوەکان نەخشەیەکە بەپێی t وتێکڕای گۆڕانی x نەگۆڕە، ئایا تێکڕای گۆڕانی y ئەویش نەگۆڕە؟ ئەگەر وابوو، ئایا تێکڕای گۆڕانەکەی بەتێکڕای گۆڕانی x یەکسان دەبێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

14 **جووڵەی گەرد** لەوێنەی بەرامبەر ڕوونكردنەوەی هەر نەخشەیەك لە نەخشەكانی خێرایی و تاودانی جولەی گەردێك لەسەر تەوەرەیەك ڕوونكراوەتەوە.

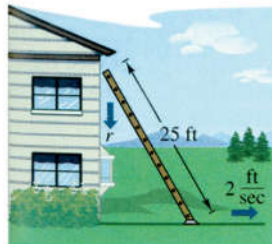


أ وێنەكە بكێشە و ڕوونكردنەوەی هەر نەخشەیەك جیابكەوە. چۆن گەیشتی بەو ئەنجامە، ڕوونیبكەوە.

ب لەسەر ئەو وێنەی كێشاوتە دیاریبكە، كەی خێرایی گەردەكە زیاددەكات وكەی كەمدەكات.

15 **بەرزە گۆشە** باڵۆنێك بەخێرایی $3\ m/s$ بەرزدەبێتەوە بە دەرچوونێك لە خاڵێكی سەر زەوی كە $30\ m$ لە چاودێرێك دوورە، تێكڕای گۆڕانی بەرزە گۆشەكە بدۆزەوە كاتێك باڵۆنەكە $30\ m$ لەسەر ڕووی زەوی بەرزبێت.

16 پەیژەیەك درێژییەكەی 25 پێیە لای سەرەوەی لەسەر دیوارێكە، ولای خوارەوەی عارەبانەیەك بەخێرایی دوو پێ لە چركەیەكدا ڕایدەكێشێت.



أ خێرایی دابەزینی لای سەرەوەی پەیژەكە لەسەردیوارەكە چەندە كاتێك لای خوارەوەی 7 پێ، لە دیوارەكە دووربێت؟

ب تێكڕای گۆڕانی ڕووبەری ئەو سێگۆشەی كە پەیژەكە لەگەڵ دیوارەكە و زەوییەكە دروستی دەكات بدۆزەوە، كاتێك لای خوارەوەی پەیژەكە 7 پێ لە دیوارەكەوە دووربێت.

بـەشی 3

پێداچوونەوەی بەش

لە ڕاهێنانی 1 تا 4 داتاشراوی هەر نەخشەیەك بە بەكارهێنانی پێناسەی داتاشراو بدۆزەوە.

1 $f(x)=x^2-2x+3$

2 $f(x)=\sqrt{x}+1$

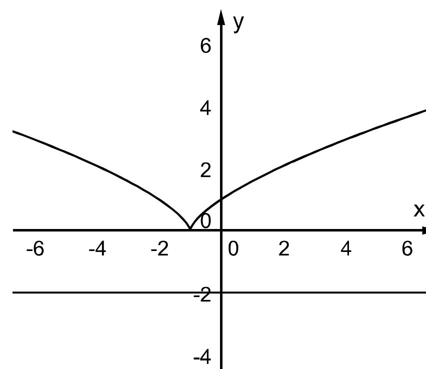
3 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

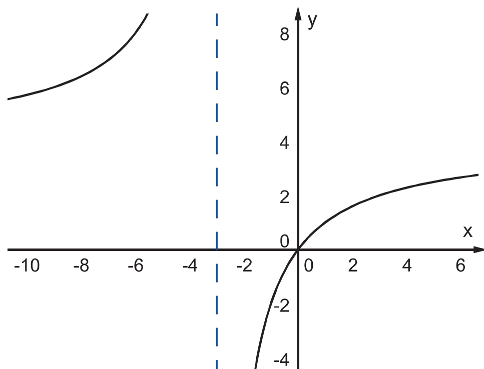
4 $f(x)=\frac{2}{x}$

لە ڕاهێنانی 5 و 6 بەهایەكانی x وادەكات نەخشەكە توانای داتاشراوی هەبێت دیاربكە.

5 $f(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}$

6 $f(x)=\frac{4x}{x+3}$





7 ڕوونكردنەوەی نەخشە $f(x)=4-|x-2|$ بكێشە.

أ ئایا نەخشەكە لە $x=2$ بەردەوامە.

ب ئایا نەخشەكە توانای داتاشراوی لە$x=2$ دا هەیە؟ وەڵامەكەت ڕوونبكەوە.

8 ڕوونكردنەوەی نەخشە $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+2 & x<-2 \\ 1-4x-x^2 & x\geq -2 \end{cases}$ بكێشە.

أ ئایا نەخشەكە لە$x=-2$ بەردەوامە.

ب ئایا نەخشەكە توانای داتاشراوی لە$x=-2$ دا هەیە؟ وەڵامەكەت ڕوونبكەوە.

لە دوو ڕاهێنانی 9 و 10 دا لاری نەخشەكە لە خاڵە دیاریكراوەكە بدۆزەوە.

9 $g(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{x}{6}$ ؛ $\left(-1,\frac{5}{6}\right)$

10 $h(x)=\frac{2}{8}x-2x^2$ ؛ $\left(-2,-\frac{34}{4}\right)$

لە ڕاهێنانی 11 و 12 دا:

أ هاوكێشەی لێكەوتی ڕوونكردنەوەی نەخشەكە لەخاڵە دیاریكراوەكە بدۆزەوە.

ب وێنەی ڕوونكردنەوەی نەخشەكە بكێشە و لێكەوت لە خاڵەكەدا بدۆزەوە.

11 $f(x)=x^3-1$ ؛ $(-1,-2)$

12 $f(x)=\frac{2}{x+1}$ ؛ $(0,2)$

لە ڕاهێنانی 13 تا 33 داتاشراوی نەخشەکە بدۆزەوە.

13 $f(x)=-12$

14 $f(x)=x^{12}$

15 $f(x)=-8x^5$

16 $f(x)=x^3-3x^2$

17 $f(x)=6\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}$

18 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$

19 $f(x)=\frac{2}{(3x)^2}$

20 $f(x)=4\cos x+6$

21 $f(x)=3\cos x-\frac{\sin x}{4}$

22 $f(x)=(3x^2+7)(x^2-2x+3)$

23 $f(x)=\sqrt{x}\sin x$

24 $f(x)=x^3\cos x$

25 $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x^2-1}$

26 $f(x)=\frac{9}{3x^2-2x}$

27 $f(x)=\frac{x^2}{\cos x}$

28 $f(x)=2x-x^2\tan x$

29 $f(x)=x\cos x-\sin x$

30 $f(x)=\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right)^2$

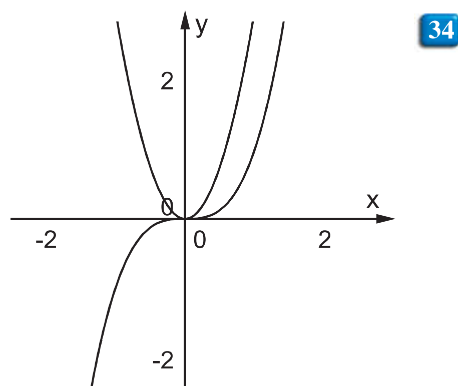
31 $f(x)=\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x-\frac{2}{7}\sin^{\frac{7}{2}}x$

32 $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$

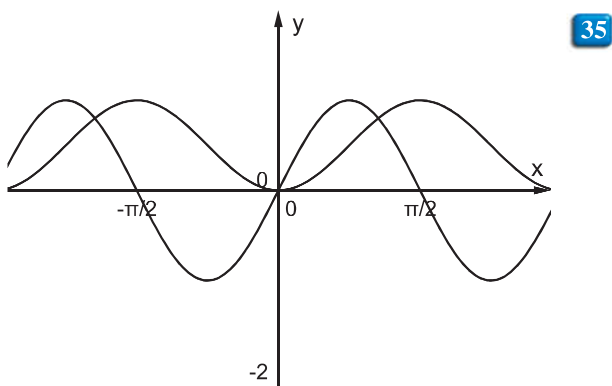
33 $f(x)=\frac{\cos(x-1)}{x-1}$

نووسین لە دوو ڕاهێنان 34 و 35 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە وداتاشراوی یەکەمی نەخشەکە دەردەکەوێت وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە و داتاشراوەکەی جیابکەوە ڕوونیبکەوە بۆ ئەو کارە پشتت بەچی بەستووە.

34



35



لە ڕاهێنانی 36 تا 41 داتاشراوی دووەمی نەخشەکە بدۆزەوە.

36 $f(x)=2x^2+\sin 2x$

37 $f(x)=\frac{1}{x}+\tan x$

38 $f(x)=\frac{1}{\tan x}$

39 $f(x)=\sin^2 x$

40 $f(x)=\frac{6x-5}{x^2+1}$

41 $f(x)=x\sqrt{x^2-1}$

لە ڕاهێنانی 42 تا 44 سەلمێنراوی لۆبیتاڵ بۆ دۆزینەوەی ئامانجی داواکراو بەکاربهێنە.

42 $\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)^2}{x-1}$

43 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin \pi x}{\sin 2\pi x}$

44 $\lim_{x\to +\infty} xe^{-x^2}$

بەشی 3

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە

1 $f(x)=4-3x$ کام لەمانە دەکاتە $f'(-1)$ ؟

أ -7 ب 7 ج -3 د 3 هـ هیچیان نییە

2 $f(x)=1-3x^2$ کام لەمانە دەکاتە $f'(1)$ ؟

أ -6 ب -5 ج 5 د 6 هـ هیچیان نییە

3 کام لەوانەی خوارەوە بۆ نەخشەی $f(x)=x^{\frac{4}{5}}$ لە $x=0$ ڕاستە؟

أ ڕوونکردنەوەکەی گۆشەی لەو خاڵەدا هەیە.

ب لێکەوتی ستوونی لەو خاڵەدا هەیە.

ج نەخشەکە لەو خاڵەدا پچڕاوە.

د $f(0)$ پێناسەنەکراوە.

هـ توانا داتاشراوی لەو خاڵەدا هەیە.

4 $f(x)=u(x)v(x)$ و $f'(1)$ بدۆزەوە ئەگەر زانیت کە $u(1)=2$ ، $u'(1)=3$ ، $v(1)=-1$ ، $v'(1)=1$.

أ -4 ب -1 ج 1 د 4 هـ 7

5 داتاشراوی دووەمی نەخشەی $f(x)=x-\frac{1}{x}$ دەکاتە.

أ $1+\frac{1}{x^2}$ ب $1-\frac{1}{x^2}$ ج $\frac{2}{x^3}$ د $-\frac{2}{x^3}$ هـ هیچ کامیان

6 کام لەمانەی خوارەوە دەکاتە $\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

أ $\frac{2}{(x-1)^2}$ ب 0 ج $\frac{x^2+1}{x^2}$ د $2x-\frac{1}{x^2}-1$ هـ $-\frac{2}{(x-1)^2}$

7 کام لەمانەی خوارەوە ژمارەی لێکەوتە ئاسۆییەکانی نەخشەی $f(x)=(x^2-1)(x^2+1)$.

أ 0 ب 1 ج 2 د 3 هـ 4

8 تێکرای گۆڕانی ساتی نەخشەی $f(x)=\frac{x^2+2}{x+4}$ لە $x=-1$ دەکاتە.

أ -1 ب -4 ج 0 د 4 هـ 7

9 تێکرای گۆڕانی ساتی قەبارە شەشپاڵوێیەك درێژی لایەکی x بێت بدۆزەوە.

أ x ب $3x$ ج $6x$ د $3x^2$ هـ x^3

لە دوو ڕاهێنانی 10 و 11 دا خاڵێك لەسەرتەوەری x دەجووڵێت و نەخشەی لادانەکەی دەکاتە $s(t)=2+7t-t^2$ کە $t\geq 0$.

10 لەکام لەم کاتانە خاڵەکە بۆ لای چەپ دەجووڵێت؟

أ $t=0$ ب $t=1$ ج $t=2$ د $t=\frac{7}{2}$ هـ $t=4$

11 لەکام لەم کاتانە خاڵەکە دەوەستێت؟

أ $t=1$ ب $t=2$ ج $t=\frac{7}{2}$ د $t=4$ هـ $t=5$

12 كام لەمانەی خوارەوە لێکەوتی نەخشەی $y=\sin x+\cos x$ لە $x=\pi$؟

أ $y=-x+\pi-1$ ب $y=-x+\pi+1$ ج $y=-x-\pi+1$

د $y=-x-\pi-1$ هـ $y=x-\pi+1$

13 y'' بدۆزەوە کە $y=x\sin x$.

أ $-x\sin x$ ب $x\cos x+\sin x$ ج $-x\sin x+2\cos x$

د $x\sin x$ هـ $-\sin x+\cos x$

14 تەنێك بەپێی نەخشەی لادانی $s(t)=3+\sin t$ دەجووڵێت لەکام لەم کاتانەی خوارەوە خێرایی تەنەکە دەکاتە سفر؟

أ $t=0$ ب $t=\frac{\pi}{4}$ ج $t=\frac{\pi}{2}$ د $t=\pi$ هـ $\frac{3\pi}{4}$

15 $y=\tan(4x)$ کام لەمانەی دێن دەکاتە $\frac{dy}{dx}$.

أ $\frac{4\tan(4x)}{\cos x}$ ب $\frac{\tan(4x)}{\cos(4x)}$ ج $\frac{4}{\tan x}$ د $\frac{1}{\cos^2(4x)}$ هـ $\frac{4}{\cos^2(4x)}$

16 $y=\cos^2(x^3+x^2)$ کام لەمانەی دێن دەکاتە $\frac{dy}{dx}$؟

أ $-2(3x^2+2x)$

ب $-(3x^2+2x)\cos(x^3+x^2)\sin(x^3+x^2)$

ج $-2(3x^2+2x)\cos(x^3+x^2)\sin(x^3+x^2)$

د $2(3x^2+2x)\cos(x^3+x^2)\sin(x^3+x^2)$

هـ $2(3x^2+2x)$

17 $x^2-xy+y^2=1$ کام لەمانە دەکاتە $\frac{dy}{dx}$.

أ $\frac{y-2x}{2y-x}$ ب $\frac{y+2x}{2y-x}$ ج $\frac{2x}{x-2y}$ د $\frac{2x+y}{x-2y}$ هـ $\frac{2x+y}{x}$

18 $y=x^{\frac{3}{4}}$ کام لەمانە دەکاتە $\frac{dy}{dx}$.

أ $\frac{3x^{\frac{1}{3}}}{4}$ ب $\frac{4x^{\frac{1}{4}}}{3}$ ج $\frac{3x^{\frac{1}{4}}}{4}$ د $\frac{4}{3x^{\frac{1}{4}}}$ هـ $\frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}}$

19 کام لەمانە لاری لێکەوتی چەماوەی $y^2-x^2=1$ لەخاڵی $(1,\sqrt{2})$.

أ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ب $-\sqrt{2}$ ج $\frac{1}{\sqrt{2}}$ د $\sqrt{2}$ هـ 0

20 کام لەمانە لاری لێکەوتی چەماوەی $y=2^{1-x}$ لەخاڵی $x=2$؟

أ $-\frac{1}{2}$ ب $\frac{1}{2}$ ج -2 د 2 هـ $-\frac{\ln 2}{2}$

جێبەجێکردنەکانی داتاشراو
Applications of Differentiation

بەشی

4

بەشی چوارەم

وانەکان

چەند هۆکارێك کاریگەری هەیە لەسەر بەکاربردنی ئۆتۆمبێل بۆ سووتەمەنی، لەوانە جۆری قیری ڕێگا کە جۆری تایەکان، خێرایی، جۆری بەنزینەکە. یەکێك لە کارگەکانی ئۆتۆمبێل نەخشەی $m(v)=0.00015v^3-0.032v^2+1.8v+1.7$ وەك نموونەیەك بەکاردەهێنێت بۆ هەژمارکردنی ئەو دوورییەی «بەمیل»، ئۆتۆمبێلەکە بە هەر گالۆنێك سووتەمەنی بەپێی خێرایی v «میل لەکاتژمێرێکدا» دەیبڕێت. بە چ خێراییەك ئەو جۆرە ئۆتۆمبێلە لێبخوڕێت تاوەکو دووری بەیەك گالۆن سووتەمەنی ببڕێت؟

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

1 هەر دەستەواژەیەکی ستوونی لای ڕاست بە لێکدانەوەکەی لە ستوونی لای چەپ ببەستەوە.

1. تێکڕای گۆڕان

2. خێرایی ساتی

3. نەخشەی لادان

4. نەخشەیەك توانای داتاشراوی هەبێت.

أ نەخشەیەکە. شوێنی تەنە جوڵاوەکە بەپێی کات دیاریدەکات.

ب ئەنجامی دابەشکردنی دوورییە لەسەر کات.

ج ڕێژەیەکە گۆڕاوی ئازاد لە ژێرەکەی دەگۆڕێت و گۆڕاوی پەیوەست لە سەرەکە دەگۆڕێت.

د خێرایی تەنێکی جوڵاوە لەساتێکی دیاریکراو.

هـ نەخشەیەکە لارییەکەی لەهەر خاڵێك لە خاڵەکانی ڕوونکردنەوەکەیدا پێناسەکراوە.

هەژمارکردنی داتاشراو

لە ڕاهێنانی 2 تاکو 7 داتاشراوی نەخشەکە بدۆزەوە.

2 $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$

3 $f(x) = 2\sin x \cos x$

4 $f(x) = x\sqrt{2x+1}$

5 $f(x) = \ln\sqrt{x}$

6 $f(x) = e^{(1+\ln x)}$

7 $f(x) = xe^{-x}$

دیاریکردنی نیشانەی نەخشە بەجەبری و ڕوونکردنەوەیی

لە ڕاهێنانی 8 تاکو 10 بەهایەکانی x دیارببکە کاتێك نیشانەی نەخشەکە دەگۆڕێت بە دیاریکردنی ئەو گۆڕانەی لە نیشانەی هەر خاڵێك ڕوودەدات.

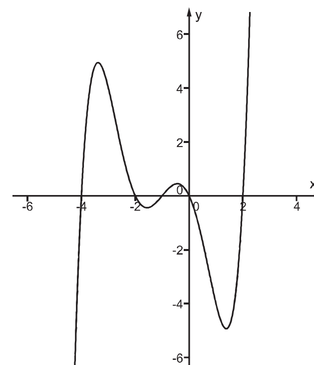
8 $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$

9 $f(x)=x^2-9$

10 $f(x)=\ln x$

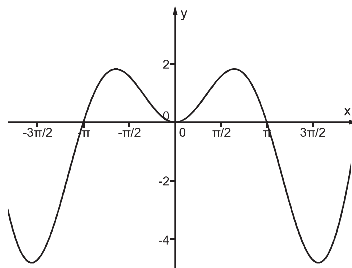
لە دوو ڕاهێنانی **11** و **12** لە نیشانەی نەخشەکە بکۆڵەوە لەماوە دیاریکراوەکەدا.

11



لە ماوەی $[-5, 5]$

12



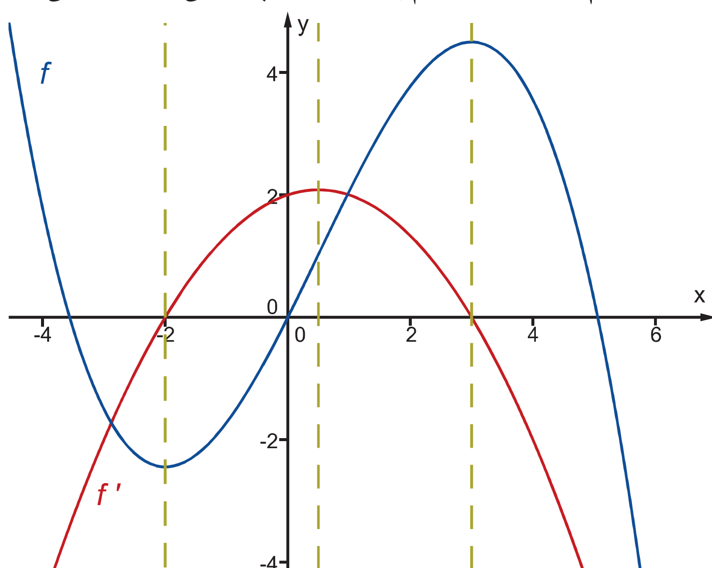
لە ماوەی $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

1-4 تاقیکردنەوەی داتاشراوی یەکەم
First Derivative Test

پەیوەندییەکی بەهێز لە نێوان نەخشەو داتاشراوەکانیان هەیە، بەمەش دەتوانیت زۆر کاری پەیوەست بە نەخشەیەك پوخت بکەیتەوە بەهۆی ئەو زانیارییانەی لە داتاشراوی یەکەم یان لە داتاشراوی دووەم دەستت دەکەوێت لەم بەشەدا فێری ئەم پەیوەندییە و چۆنیەتی بەکارهێنانی دەبیت.

ئامانجەکان

- چەمکی بەهای کۆتایی خۆجێی نەخشە فێردەبێت و جیایدەکاتەوە.
- بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی نەخشە دیاریدەکات.
- ماوەکانی ڕوو لەزیادبوون و ڕوو لە کەمبوونی نەخشە دیاریدەکات.
- تاقیکردنەوەی داتاشراوی یەکەم بەکاردەهێنێت بۆ دۆزینەوەی بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی نەخشە.



ڕوو لەزیادبوون و ڕوو لەکەمبوونی نەخشەکان

لە وێنەی سەرەوە ڕوونکردنەوەی نەخشەی f (بەڕەنگی شین) و ڕوونکردنەوەی داتاشراوی یەکەم بە (ڕەنگی سوور) دەردەکەوێت، ئەگەر لەوێنە ڕوونکردنەوەکە وردبیتەوە: دەگەیتە ئەم دەرئەنجامانە.

1. کاتێك x لەسەر تەوەرکەی لە لای چەپ بەرەو لای ڕاست دەجولێت، خاڵی $M\left(x, f(x)\right)$ لەسەر ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بەرەو خوارەوە دەجولێت کە ئەمەش دەربڕینە بۆ ڕوو لەکەمبوونی بەهایەکانی $f(x)$ ، تا x دەگاتە -2 ، دەتوانین ئەمەش بەو ئاخاوتنە دەربڕین، نەخشەکە ڕوو لەکەمبوونە لەماوەی $]-\infty, -2[$.

2. دوای ئەوەی x لە -2 تێدەپەڕێت، خاڵی $M\left(x, f(x)\right)$ لەسەر ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بەرەو سەرەوە دەجوولێت، دەربڕینە بۆ ڕوو لەزیادبوونی بەهایەکانی $f(x)$ ، تا x دەگاتە 3، دەتوانین ئەمەش بەو ئاخاوتنە دەربڕین، نەخشەکە ڕوو لەزیادبوونە لە ماوەی $]-2, 3[$.

3. خاڵی $M\left(x, f(x)\right)$ دەست بە جوڵان دەکاتەوە لەسەر ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بەرەو خوارەوە دوای ئەوەی بەهای x لە 3 تێپەڕدەبێت، دەربڕینە بۆ ڕوو لەکەمبوونی بەهایەکانی $f(x)$ دووبارە. دەتوانین ئەمەش بەو ئاخاوتنە دەربڕین نەخشەکە ڕوو لەکەمبوونە لە ماوەی $]3, +\infty[$.

4. بەهایەکانی داتاشراوی یەکەمی نەخشەکە سالبە لەهەردوو ماوەی $]-\infty, -2[$ و $]3, +\infty[$ بەڵام لەماوەی $]-2, 3[$ موجەبە.

5. ڕوو لەکەمبوونی نەخشە لەماوەیەکدا بەستراوەتەوە بە سالبوونی بەهایەکانی داتاشراوی یەکەم، و ڕوو لەزیادبوونی بەستراوتەوە بە موجەبوونی بەهایەکانی داتاشراوی یەکەم، بە بەهایەکانی x کەوادەکات $f'(x)=0$ دەوترێت بەها **شلۆقەکانی** نەخشە.

زاراوەکان
Vocabulary

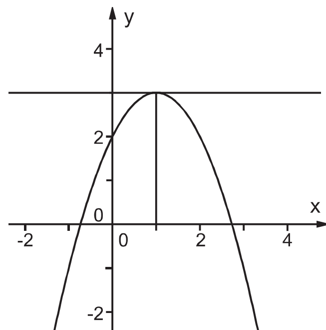
- ڕوو لەکەمبوون — Decreasing
- ڕوو لە زیادبوون — Increasing
- بەهای بچووکترین کۆتایی خۆجێیی — Local Minimum value
- بەهای گەورەترین کۆتایی خۆجێیی — local maximum value
- خاڵی وەرگەڕان — point of Infflction
- بەهای شلۆق — Critical Value
- خشتەی گۆڕانەکان — Table of variations

دەتوانیت ئەوەی پێشوو لەم خشتەیە پوختەبکەیت.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$	↘ ڕوو لەکەمبوون	↗ ڕوو لەزیادبوون	↘ ڕوو لەکەمبوون	

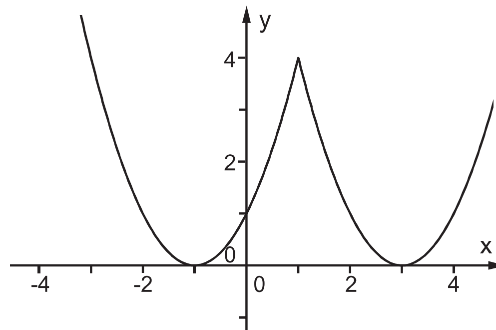
پێناسەی بەها شلۆقەکان

f نەخشەیەکی پێناسەکراوە لە $x=c$ ، بە بەهای c بۆ گۆڕاوی ئازادی x دەوترێت بەهای شلۆقی نەخشەی f ئەگەر داتاشراوەکەی پێناسە نەکرابێت لە $x=c$ یان ئەگەر $f'(c)=0$.



$f'(x)=0$

1 بەهای شلۆقی نەخشەکەیە.



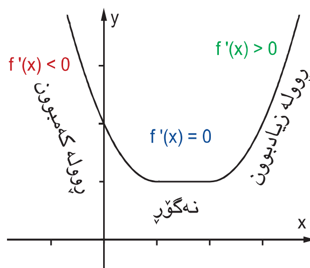
$f'(x)$ پێناسەنەکراوە لە $x=1$

1 بەهای شلۆقی نەخشەکەیە.

پێناسەی نەخشە ڕوو لە زیادبوونەکان و ڕوو لە کەمبوونەکان

بە نەخشەی f دەوترێت ڕوو لەزیادبوون لە ماوەی $I=[a,b]$ ئەگەر لاسەنگەی $x_1 < x_2$ ئەوا $f(x_1) < f(x_2)$ کە x_1 و x_2 هەرچەندبێت لەماوەی I.

هەروەها بە نەخشەی f دەوترێت ڕوو لەکەمبوون لەماوەی $I=[a,b]$ ئەگەرلاسەنگەی $x_1 < x_2$ ئەوا $f(x_1) > f(x_2)$ کە x_1 و x_2 هەرچەندبێت لەماوەی I.



بە واتایەکی تر، نەخشەکە ڕوو لەزیادبوون دەبێت کاتێك خاڵی $(x, f(x))$ بەرەو سەرەوە دەجوڵێت هەرچەند x بەرەو لای ڕاست بجوڵێت. و ڕوو لەکەمبوون دەبێت کاتێك خاڵی $(x, f(x))$ بەرەو خوارەوە دەجوڵێت، هەرچەند x بەرەو لای ڕاست بجوڵێت، بۆ نموونە:

لەوێنەی بەرامبەر نەخشەکە ڕوو لەکەمبوونە لەماوەی $]-\infty, a[$ و نەگۆڕە لەماوەی $]a, b[$ و ڕوو لەزیادبوونە لەماوەی $]b, +\infty[$ هەروەها، لە وێنەکە ئەوە دەردەکەوێت کە موجەبوونی داتاشراوەکە بە ڕوولەزیادبوونی نەخشەکە لێکدەدرێتەوە، هەروەها کاتێك داتاشراوەکە سالب بێت بە ڕوولەکەمبوونی نەخشەکە لێکدەدرێتەوە، بەڵام نەبوونی داتاشراوەکە$(f'(x)=0)$ لە ماوەیەکدا بە نەگۆڕی لێکدەدرێتەوە.

سەلمێنراوی 4-1 ڕوو لەزیادبوون و ڕوو لەکەمبوون نەخشە

نەخشەی f توانای داتاشراوی دەبێت.

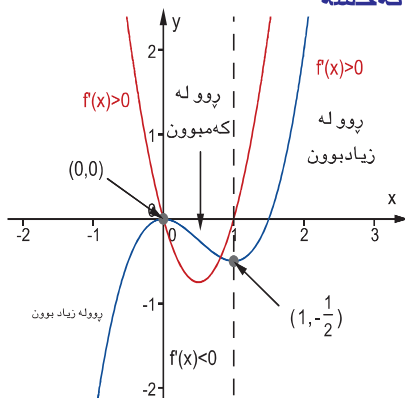
1. ئەگەر $f'(x)>0$ لەماوەی I دا، ئەوا f نەخشەیەکی ڕوو لەزیادبوونە لەم ماوەیەدا.

2. ئەگەر $f'(x)<0$ لەماوەی I دا، ئەوا f نەخشەیەکی ڕوو لەکەمبوونە لەم ماوەیەدا.

3. ئەگەر $f'(x)=0$ لەماوەی I دا، ئەوا f نەخشەیەکی نەگۆڕە لەم ماوەیەدا.

نموونـــــە 1 ماوەکانی ڕوو لە زیادبوون و ڕوو لە کەمبوونی نەخشە

ماوەکانی ڕوو لەزیادبوون و ڕوو لەکەمبوونی نەخشەی $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2$ بدۆزەوە.



شیكار

نەخشەی f توانای داتاشراوی هەیە لە R

چونکە نەخشەیەکی ڕادەرە بۆ دیاریکردنی

بەهایەکانی شلۆق بۆ نەخشەکە، داتاشراوەکەی بدۆزەوە

بەهایەکانی x دیاریبکە کە ئەو داتاشراوە دەکەنە 0.

$$f'(x)=3x^2-2\left(\frac{3}{2}\right)x=3x^2-3x=3x(x-1)$$

بەهایەکانی x کە داتاشراو دەکەنە 0 بریتییە لە $x=0$ و $x=1$ نەخشەکە دوو بەهای شلۆقی هەیە ئەوانیش 0 $x=0$ و $x=1$ ، دەتوانیت ئەوانەی پێشوو لەم خشتەی خوارەوە پوخت بکەیتەوە کە بە **خشتەی گۆڕان** ناودەبرێت.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$3x$	$-\infty$	$-$	0	$+$	3	$+$	$+\infty$
$(x-1)$	$-\infty$	$-$	-1	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(0)=0$	$\searrow$	$f(x)=-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

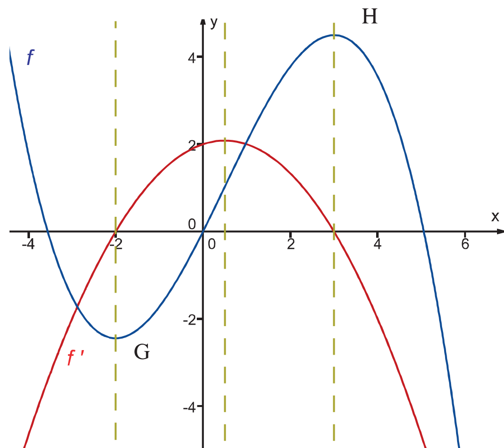
نەخشەکە ڕوو لەزیادبوونە لەهەردوو ماوەی $]-\infty,0[$ و $]1,+\infty[$ ڕوو لەکەمبوونە لەماوەی $]0,1[$



1. ماوەکانی ڕوو لەزیادبوون و ڕوو لەکەمبوونی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}$ بدۆزەوە.

بۆ ئەوەی پەیوەندی نێوان نیشانەی داتاشراو لە ماوەیەك و ڕوو لەزیادبوون و ڕوولەکەمبوونی نەخشەکە تێبگەیت، ئەمانەی دێت تێبینی بکە. ئەگەر نەخشەکە ڕوو لەزیادبوون بێت واتا $f(x+h)>f(x)$ کاتێك $h>0$ واتا $f(x+h)<f(x)$ کاتێك $h<0$. لەوەوە دەردەچێت کە $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0$ لە دواییدا $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0$ لەهەموو ئەو بارانەی کە تێیدا نەخشەکە ڕوو لەزیادبوونە. بەهەمان شێوە دەتوانیت لێکبدەیتەوە بۆچی داتاشراوەکە سالب دەبێت لە ماوەیەکدا ئەگەر نەخشەکە ڕوو لەکەمبوون بێت.

بەهایەکانی گەورەترین خۆجێی و بچووکترین خۆجێی



لێرەوە فێردەبیت چۆن داتاشراو بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی بەهایەکانی گەورەترین خۆجێی و بچووکترین خۆجێی نەخشەیەك. سەیری وێنە ڕوونکردنەوەکەی بەرامبەر بکە ئەمانەت بۆ دەردەچێت.

1. ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بە خاڵی Gدا دەڕوات کاتێك بەهای x دەکاتە -2، هەروەها بەخاڵی H دا دەڕوات کاتێك بەهای x دەکاتە 3.

2. تانەکانی y بۆ هەموو خاڵەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لە هاوسێیەکانی خاڵی G گەورەترە لە تانی خاڵەکە کە یەکسانە بە $f(-2)$، بە خاڵی G دەوترێت بەهای بچووکترین خۆجێی نەخشەی f دەنوێنێت وتانی y بچووکترین ئەو خاڵە دەکاتە بەهای بچووکترین خۆجێی نەخشەکە.

3. تانەکانی y بۆ هەموو خاڵەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لە هاوسێیەکانی خاڵی H بچووکترە لە تانی خاڵەکە کە یەکسانە بە $f(3)$ و خاڵی H بەهای گەورەترین خۆجێی نەخشەی f دەنوێنێت. تانی y ئەو خاڵە دەکاتە بەهای گەورەترین خۆجێی نەخشەکە.

4. داتاشراوی یەکەم دەکاتە 0 کاتێك نەخشەکە بەهای گەورەترین خۆجیی یان بەهای بچووکترین خۆجێی دەبێت. بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی نەخشە بریتییە لە گەورەترین و بچووکترین بەها خۆجێییەکان.

ئەم خشتەی خوارەوە تێبینیەکانی پێشوو پوختدەکاتەوە.

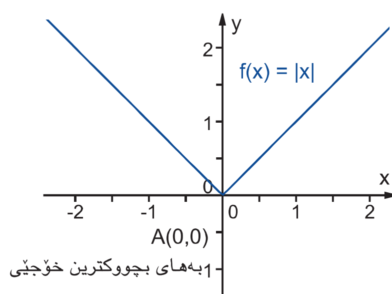
x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$f(-2)$	↗	$f(3)$	↘

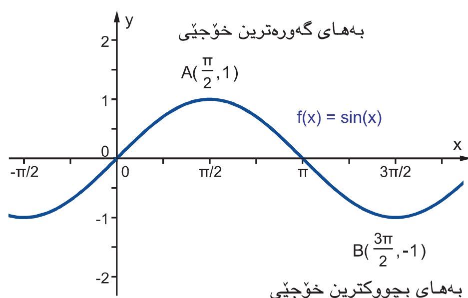
نموونـــــە 2 بەهایەکانی داتاشراو لە بەهای کۆتایی خۆجێی

بەهای داتاشراوەکە بدۆزەوە لەهەر بەهایەکی کۆتایی خۆجێی بۆ هەردوو نەخشەی

أ $f(x)=|x|$ لەماوەی $[-1, 1]$

ب $f(x)=\sin x$ لەماوەی $[0, 2\pi]$





شیکار

أ نەخشەی $f(x)=|x|$ بەهای بچووکترین خۆجێی هەیە لە $x=0$، داتاشراوی نەخشەکە لەو خاڵەدا پێناسەنەکراوە.

ب نەخشەی $f(x)=\sin x$ بەهای گەورەترین خۆجێی لە $x=\frac{\pi}{2}$ و بەهای بچووکترین خۆجێی لە $x=\frac{3\pi}{2}$ هەیە داتاشراوی نەخشەکە بریتییە لە $f'(x)=\cos x$ کە لە بەهایەکانی کۆتایی ئەم بەهایانەی دێت وەردەگرێت:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad \text{و} \quad f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$$



2. بەهای داتاشراوەکە لەهەر بەهایەکی کۆتایی ئەم دوو نەخشەیە بدۆزەوە.

$$f(x)=-|x| \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{9\left(x^2-3\right)}{x^3}$$

سەلمێنراوی 4-2 تاقیکردنەوەی داتاشراوی یەکەم

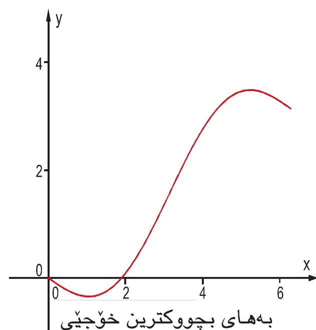
$x=c$ بەهای شلۆقە بۆ نەخشەی f کە توانای داتاشراوی لە هاوسێیەکانی ئەو بەهایەدا هەیە:

1. ئەگەر نیشانەی $f'(x)$ لە موجەبەوە بۆ سالب بگۆڕێت کاتێك بە $x=c$ دا دەڕوات ئەوا خاڵی $(c,f(c))$ بەهای گەورەترین خۆجێی دەنوێنێت.
2. ئەگەر نیشانەی $f'(x)$ لە سالب بۆ موجەب بگۆڕێت کاتێك بە $x=c$ دا دەڕوات ئەوا خاڵی $(c,f(c))$ بەهای بچووکترین خۆجێی دەنوێنێت.

نموونــــە 3

بەکارهێنانی داتاشراوی یەکەم

بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$ لەماوەی $]0, 2\pi[$ بدۆزەوە.



شیکار

نەخشەکە توانای داتاشراوی لەماوەی $]0, 2\pi[$دا هەیە، بە دۆزینەوەی خاڵەکانی شلۆق دەستپێبکە.

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\cos x$$

لەبەرئەوەی داتاشراوەکە پێناسەکراوە لە هەموو بەهایەکانی x ئەوا بەها شلۆقەکانی نەخشەکە ئەوانەن کە شیکاری هاوکێشەی $\frac{1}{2}-\cos x=0$ پێکدەهێنێت لە ماوەی $]0, 2\pi[$، لێرەدا دوو بەها هەیە $x=\frac{\pi}{3}$ و $x=\frac{5\pi}{3}$.

خشتەی گۆڕان ئەمەی خوارەوەیە

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\frac{1}{2}$
$f(x)$	0	$\searrow$	$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi-3\sqrt{3}}{6}$	$\nearrow$	$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{5\pi+3\sqrt{3}}{6}$	$\searrow$	π

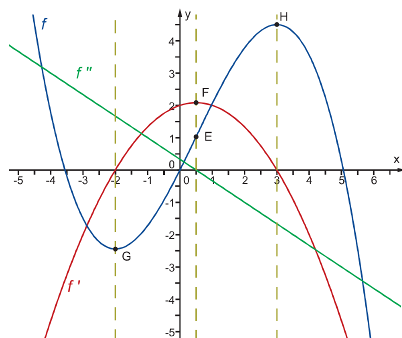
دوای دروستکردنی خشتەی گۆڕانەکان، دیاریکردنی بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی وجۆری هەریەکەیان ئاسان دەبێت. نەخشەی f بەهای بچووکترین خۆجێی هەیە لە $x=\frac{\pi}{3}$ کە دەکاتە $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi-3\sqrt{3}}{6}$ وبەهای گەورەترین خۆجێ هەیە لە $x=\frac{5\pi}{3}$ کە دەکاتە $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{5\pi+3\sqrt{3}}{6}$



3. بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی نەخشەی $f(x)=\cos x-\frac{1}{2}x$ بدۆزەوە لە ماوەی $[0 ، 2\pi]$ و جۆری هەریەکەیان دیاریبکە.

خاڵەکانی وەرگەڕان

وێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەکانی نەخشەی f بە (ڕەنگی شین) وداتاشراوی یەکەمی (بەڕەنگی سوور) و داتاشراوی دووەمی بە (ڕەنگی سەوز) دەنوێنێت. دەتوانیت تێبینی ئەوە بکەیت کە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە قۆپاوە کاتێك داتاشراوی دووەمی موجەب دەبێت و قۆقز دەبێت کاتێك داتاشراوی دووەمی سالب دەبێت، هەروەها لە خاڵی E چەماوەکە لە قۆپاو بۆ قۆقز دەگۆڕێت، سەرنجبدە کە پۆی ئەو خاڵە بریتییە لە بەهای x کە داتاشراوی دووەمی دەکاتە 0، بە E دەوترێت خاڵی **وەرگەڕانی نەخشەکە**.



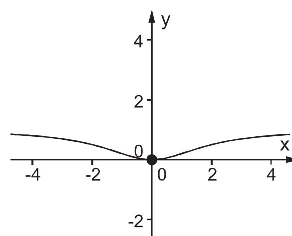
1-4 ڕاهێنان

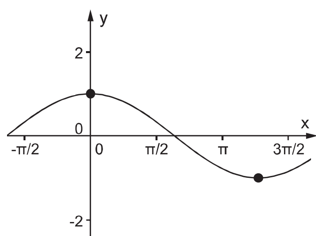
لە ڕاهێنانی **1** تا **3**، بەهای داتاشراوەکە (ئەگەر هەبوو) لەهەر بەهایەکی کۆتایی بدۆزەوە.

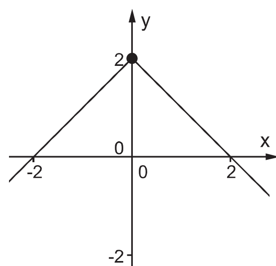
1 $f(x)=\frac{x^2}{x^2+4}$

2 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$

3 $f(x)=2-|x|$



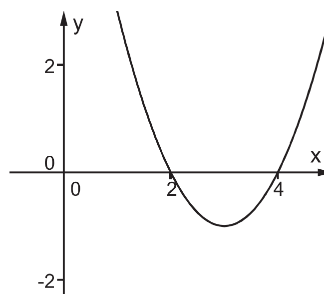


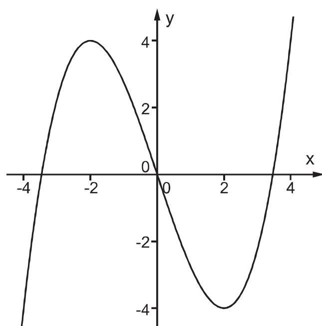


لە ڕاهێنانی **4** تا **10**، ماوەکانی ڕوو لە زیادبوون و ڕوو لە کەمبوون بدۆزەوە.

4 $f(x)=x^2-6x+8$

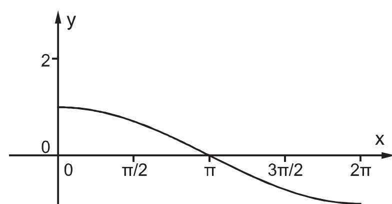
5 $f(x)=\frac{x^3}{4}-3x$





6 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$

$0<x<2\pi$



7 $f(x)=\frac{1}{x^2}$

8 $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

9 $f(x)=27x-x^3$

10 $f(x)=x-2\cos x \quad 0<x<2\pi$

لە ڕاهێنانی **11** تا **13** بەها شلۆقەکانی نەخشەکە بدۆزەوە.

11 $f(x)=x^2(x-3)$

12 $f(x)=x^2\left(x^2-4\right)$

13 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

لە ڕاهێنانی 14 تا 22 أ) بەها شلۆقەکان بدۆزەوە ب) ماوەکانی ڕوو لەزیادبوون و ڕوو لەکەمبوونی نەخشەکە بدۆزەوە جـ) داتاشراوی یەکەم بۆ دۆزینەوەی بەهایەکانی کۆتایی خۆجیٚ بەکاربهێنە

14 $f(x) = x^2 - 6x$

15 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

16 $f(x) = x^2(3 - x)$

17 $f(x) = \frac{x^5 - 5x}{5}$

18 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 4$

19 $f(x) = 5 - |x - 5|$

20 $f(x) = x + \frac{1}{x}$

21 $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$

22 $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$

لە ڕاهێنانی 23 تا 26 أ) بەها شلۆقەکان بدۆزەوە ب) ماوەکانی ڕوو لەزیادبوون و ڕوو لە کەمبوونی نەخشەکە بدۆزەوە جـ) داتاشراوی یەکەم بۆ دیاریکردنی بەهایەکانی کۆتایی خۆجیٚ بەکاربهێنە د) وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە بۆئەوەی ڕاستی وەڵامەکەت پاسادان بکەیت. (تەنها لەماوەی $]0, 2\pi[$ کارەکەت ئەنجام بدە)

23 $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x$

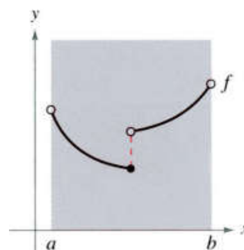
24 $f(x) = (\sin x)(\cos x)$

25 $f(x) = \cos^2(x)$

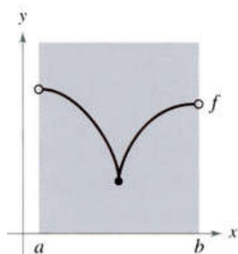
26 $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$

لە ڕاهێنانی 27 تا 30، دیاریبکە ئەگەر نەخشەکە بەهای بچووکترین کۆتایی خۆجیٚ لەماوەی $]a, b[$ دا هەیە، بەپێی ڕوونکردنەوەکەی لەو ماوەیەدا.

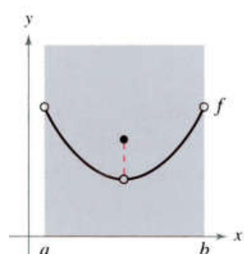
27



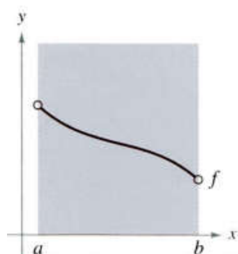
28



29



30



2-4

تاقیکردنەوەی داتاشراوی دووەم

Second Derivative Test

ئامانجەکان

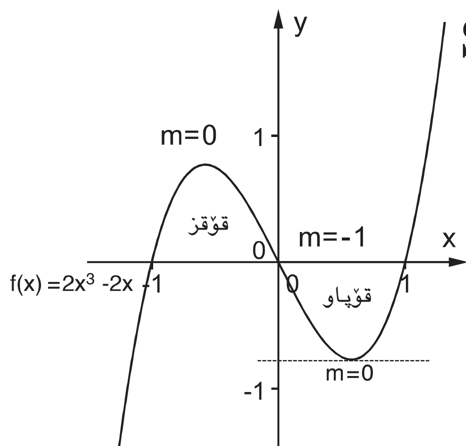
- ئەو ماوانەی کە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە تێیدا قۆپاوە یان قۆقزە دیاریدەکات.
- خاڵەکانی وەرگەڕانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە دەدۆزیتەوە.
- داتاشراوی دووەم بۆ پۆلینکردنی بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی نەخشەکە بەکاردەهێنێت.

زاراوەکان

Vocabulary

قۆپاو	Concave
قۆقز	Convex

قۆقز و قۆپاو



ئەگەر نەخشەی f لەماوەیەکی کراوە توانای داتاشراوی هەبێت، و داتاشراوی یەکەمی لەو ماوەیەدا ڕوو لەزیادبوون بێت، ئەوا چەماوەکە **قۆپاوە** لەو ماوەیەدا بەڵام ئەگەر داتاشراوەکە لەو ماوەیەدا ڕوو لەکەمبوون بێت، ئەوا چەماوەکە **قۆقزە** لەو ماوەیەدا.

سەیری چەماوەی نەخشەی $f(x) = 2x^3 - 2x$ لە وێنەی بەرامبەر بکە، ئەم چەماوەیە لەماوەی $]-1, 0[$ قۆقزە و لەماوەی $]0, 1[$ قۆپاوە.

نەخشەکە لێکەوتێکی لەخاڵی $(0, 0)$ دا هەیە کە چەماوەکەی لە قۆقزەوە بۆ قۆپاو دەگۆڕێت.

تاقیکردنەوەکانی قۆقز و قۆپاو

f نەخشەیەکە لەماوەی کراوەی I دووجار توانای داتاشراوی هەیە.

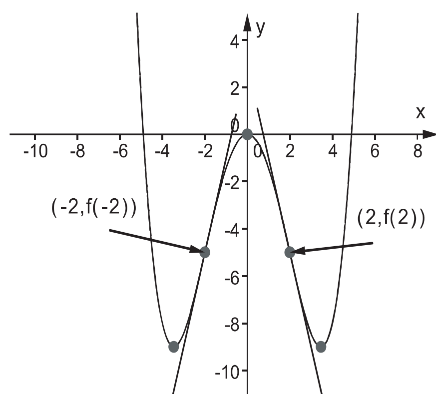
1. ئەگەر $f''(x) > 0$ لەماوەی I دا، ئەوا چەماوەی نەخشەکە لەماوەی I قۆپاوە.

2. ئەگەر $f''(x) < 0$ لە ماوەی I دا، ئەوا چەماوەی نەخشەکە لەماوەی I قۆقزە.

نموونـــــە 1

دیاریکردنی قۆقز و قۆپاو

ماوەکانی قۆقز و قۆپاوی نەخشەی $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2$ بدۆزەوە.



شیکار

داتاشراوی یەکەمی نەخشەکە بریتییە لە $f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ و داتاشراوی دووەمی بریتییە لە $f''(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$.

دیارە $f''(x) = 0$ کاتێک $x = \pm 2$.

لەلایەکی ترەوە $f''(x) > 0$ لە هەردوو ماوەی $]-\infty, -2[$ وماوەی $]2, +\infty[$ و $f''(x) < 0$ لەماوەی $]-2, 2[$. لەمەوە بۆت دەردەکەوێت کە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە قۆقزە لەماوەی $]-2, 2[$ و قۆپاوە لە هەردوو ماوەی $]-\infty, -2[$ و $]2, +\infty[$، دەتوانیت ئەوەی پێشوو لەم خشتەی دێت پوختبکەیتەوە.

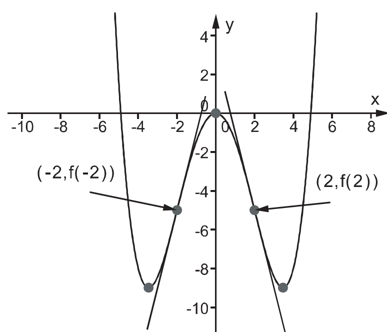
x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	−	+	
ڕوونکردنەوەکە $f(x)$	∪	∩	∪	



1. ماوەکانی قۆقز و قۆپاو بۆ نەخشەی $f(x)=x^4-4x^2+1$ بدۆزەوە.

خاڵەکانی وەرگەڕان

بەگەڕانەوە بۆ ڕوونکردنەوەی نەخشەی نموونەی 1 دەبینیت ڕوونکردنەوەکە لە خاڵی $(-2, f(-2))$ لە قۆپاو بۆ قۆقز و لە خاڵی $(2, f(2))$ لە قۆقزەوە بۆ قۆپاو دەگۆڕێت بە هەریەکە لەو دوو خاڵە دەوترێت **خاڵی وەرگەڕان**.



پێناسەی خاڵی وەرگەڕان

ئەگەر نەخشەی f بەردەوام بێت و ئەگەر ڕوونکردنەوەکەی لێکەوتی لە خاڵی $(c, f(c))$ هەبێت، ئەوا ئەو خاڵە بریتییە لە خاڵی وەرگەڕانی نەخشەکە و ڕوونکردنەوەکەی. ئەگەر چەماوەکە لەوخاڵەدا لە قۆپاو بۆ قۆقز یان لە قۆقزەوە بۆ قۆپاو بگۆڕێت.

لەبیرمەکە

لە پێناسەی خاڵی وەرگەڕان پێویستە نەخشەکە لێکەوتی هەبێت لەو خاڵەدا.

بۆ دۆزینەوەی خاڵەکانی هەڵبژێردراو کە دەبنە خاڵی وەرگەڕان، بەهایەکانی x دیاریبکە کە $f''(x)=0$ یان $f''(x)$ نەبێت.

سەلمێنراوی 4-3 خاڵی وەرگەڕان

ئەگەر $(c, f(c))$ خاڵی وەرگەڕانی نەخشەیەك بێت، ئەوا $f''(c)=0$ یان $f''(c)$ ی پێناسەنەکراوە.

نموونـــە 2

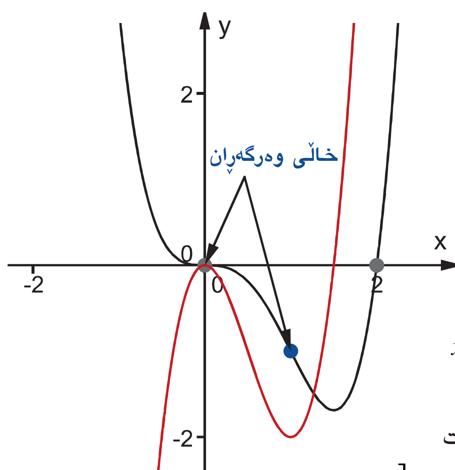
دۆزینەوەی خاڵەکانی وەرگەڕان

خاڵەکانی وەرگەڕان بۆ نەخشەی $f(x)=x^4-2x^3$ دیاریبکە پاشان ماوەی قۆقز و قۆپاوی ڕوونکردنەوەکە دیاریبکە.

شیکار

داتاشراوی یەکەمی نەخشەکە دەکاتە $f'(x)=4x^3-6x^2$ و داتاشراوی دووەمی دەکاتە $f''(x)=12x^2-12x$ ، $f''(x)=0$ لە $x=0$ و $x=1$

ڕوونکردنەوە سوورەکە بریتییە لە ڕوونکردنەوەی داتاشراوی یەکەم، لەو ڕوونکردنەوەدا، دەردەکەوێت کە داتاشراوی یەکەم ڕوو لەزیادبوونە لەماوەی $]-\infty, 0[$ ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت.



ڕوونکردنەوەی نەخشەکە قۆپاوە لەم ماوەیەدا، لەلایەکی تر داتاشراوی یەکەم لەماوەی $]0, 1[$
ڕوو لەکەمبوونە ئەمەش ئەوە دەگەیێنێت کە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەم ماوەیەدا قۆقزە،
ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لە خاڵی $(0, 0)$ لە قۆپاوە وە بۆ قۆقز دەگۆڕێت، ئەمەش ئەوە دەگەیێنێت
کە ئەو خاڵە بریتییە لەخاڵی وەرگەڕان.
لەلایەکی تر داتاشراوی یەکەمی نەخشەکە لەماوەی $]1, +\infty[$ زیاد دەکات ئەمەش ئەوە دەگەیێنێت
ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەو ماوەیەدا قۆپاوە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەخاڵی $(1, -1)$ لە
قۆقزەوە بۆ قۆپاو دەگۆڕێت ئەمەش ئەوە دەگەیێنێت ئەو خاڵە خاڵی وەرگەڕانە.

ئەو ماوەیەی ماوەتەوە ... نەخشەکە لە $x = 0$ و $x = 2$ لێکەوتی هەیە.

تێبینی بکە

نەخشەکە لە $x = 0$ و $x = 2$ لێکەوتی هەیە.



2. خاڵەکانی وەرگەڕانی نەخشەی $f(x) = -x^4 + 2x^3$ دیاریبکە و لەقۆقز و قۆپاوی ڕوونکردنەوەکەی بکۆڵەوە.

سەرەرای تاقیکردنەوەی قۆپاو وقۆقزی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە، داتاشراوی دووەم یارمەتیدەرە بۆ پۆلینکردنی بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی لەنێوان بەهایەکانی گەورەترین و بەهایەکانی بچووکترین.
ئەم تاقیکردنەوەیە پشت دەبەستێت بەوەی کە قۆقزی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لە هاوسێکانی خاڵی $(c, f(c))$ کە $f'(c) = 0$ پێویستە $f(c)$ بکاتە بەهای گەورەترین خۆجێی. هەروەها قۆپاوی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەهاوسێکانی $(c, f(c))$ کە $f'(c) = 0$ پێویستە $f(c)$ بکاتە بەهای بچووکترین خۆجێی.

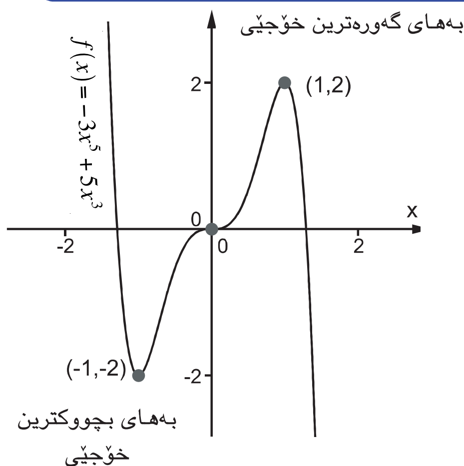
تاقیکردنەوەی داتاشراوی دووەم

$f(x)$ نەخشەیەکە پاسادانی $f'(c) = 0$ دەکات و $f''(x)$ لە هاوسێیەکانی $(c, f(c))$ پێناسەکراوە.

1. ئەگەر $f''(c) > 0$ ئەوا خاڵی $(c, f(c))$ بەهای بچووکترین خۆجێی نەخشەکە دەنوێنێت چونکە دەکەوێتە ناوچەی قۆپاو.

2. ئەگەر $f''(c) < 0$ ئەوا خاڵی $(c, f(c))$ بەهای گەورەترین خۆجێی نەخشەکە دەنوێنێت. چونکە دەکەوێتە ناوچەی قۆقز.

ئەگەر $f''(c) = 0$ ئەوا تاقیکردنەوەکە سەرکەوتوو نابێت، پێویستە لەو بارەدا داتاشراوی یەکەم بەکاربهێنیت.



نموونە 3

بەکارهێنانی داتاشراوی دووەم

بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی نەخشەی $f(x) = -3x^5 + 5x^3$ بدۆزەوە.

شیکار

داتاشراوی یەکەم بۆ نەخشەکە دەکاتە:

$f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = 15x^2(1 - x^2)$ و

داتاشراوی دووەمی دەکاتە $f''(x) = 30(-2x^3 + x)$

$f'(x) = 0$ کاتێک $x = -1$ و $x = 0$ و $x = 1$ نەخشەکە

بەهای بچووکترین خۆجێی دەبێت کاتێک $x = -1$

$f''(-1) = 30(-2(-1)^3 + (-1)) = 30 > 0$

بەهای گەورەترین خۆجێی دەبێت کاتێک $x = 1$ ئەوا $f''(1) = 30(-2 \times 1^3 + 1) = 30 < 0$

لەبەرئەوەی $f''(0) = 0$، ئەوا تاقیکردنەوەکە سەرکەوتوو نابێت بۆ دیاریکردنی کۆتایی خۆجێی لە $x = 0$ داتاشراوی یەکەم بەکاربهێنە بۆ ئەوەی دەربیخەیت نەخشەکە لە پێش و لەدوای $x = 0$ ڕوو لەزیادبوونە ئەمەش ئەوە دەگەیێنێت کە لەوخاڵەدا بەهای کۆتایی خۆجێی نابێت.

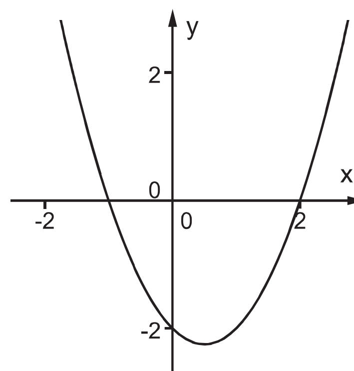


3. خاڵەکانی کۆتایی خۆجێی نەخشەی $f(x) = x^5 - 0.15x^3$ بدۆزەوە.

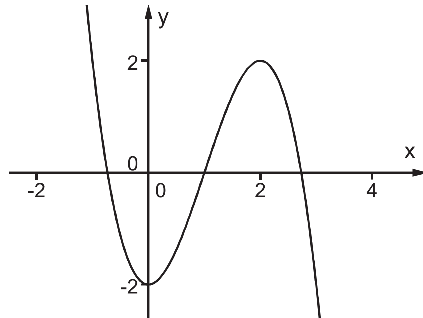
2-4 ڕاهێنان

لەڕاهێنانی 1 تا 4 ئەوماوە کراوانە دیارییبکە کە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە تیایدا قۆپاوە یان قۆقزە.

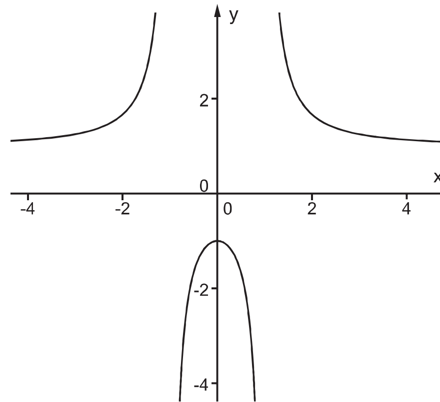
1



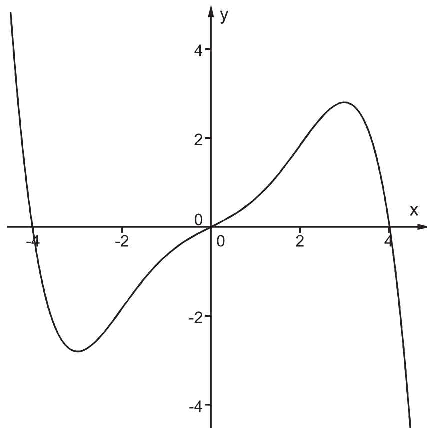
2



3



4



لە ڕاهێنانی 5 تا 11 خاڵەکانی وەرگەڕان بدۆزەوە وماوەکانی قۆپاو و قۆقزی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە دیارییبکە.

5 $f(x)=x^3-6x^2+12x$ **6** $f(x)=x\sqrt{x+3}$ **7** $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

8 $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ لەماوەی $[0, 4\pi]$ **9** $f(x)=\frac{1}{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$ لەماوەی $[0, 4\pi]$

10 $f(x)=\sin x+\cos x$ لەماوەی $[0, 2\pi]$ **11** $f(x)=x+2\cos x$ لەماوەی $[0, 2\pi]$

لە ڕاهێنانی 12 تا 17 بەهایەکانی کۆتایی (گەورەترین و بچووکترین) خۆجێی بدۆزەوە بە بەکارهێنانی داتاشراوی دووەم ئەگەر لە تواناد بوو.

12 $f(x)=x^4-4x^3+2$ **13** $f(x)=-(x-5)^2$ **14** $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-3$

15 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ **16** $f(x)=x+\frac{4}{x}$ **17** $f(x)=\cos x-x$

دەربارەی چەمکەکان

18 نەخشەی f داتاشراوەکەی نەخشەیەکی ڕوو لەزیادبوونە، ڕوونکردنەوەیەك بۆ f بکێشە کاتێك

أ $f' < 0$ ب $f' > 0$

19 نەخشەی f داتاشراوەکەی نەخشەیەکی ڕوو لەکەمبوونە، ڕوونکردنەوەیەك بۆ f بکێشە کاتێك

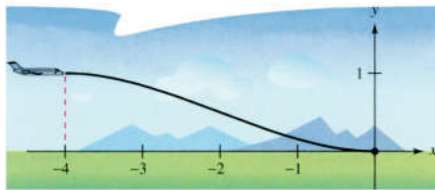
أ $f' < 0$ ب $f' > 0$

20 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f بکێشە خاڵی $(c, f(c))$ لەخۆبگرێت کە $f''(c) = 0$ کاتێك $(c, f(c))$ خاڵی وەرگەڕانی نەخشەکە نەبێت.

21 ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = \sqrt[3]{x}$ بکێشە وخاڵی وەرگەڕانی دیاریبکە، ئایا داتاشراوی دووەم $f''(x)$ لەخاڵی وەرگەڕان پێناسەکراوە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

22 بەهایەکانی a و b و c و d بدۆزەوە کاتێك نەخشەی سێجای $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ بەهای گەورەترین خۆجێی لەخاڵی $(3, 3)$ و بەهای بچووکترین خۆجێی لەخاڵی $(5, 1)$ وخاڵی وەرگەڕانی لە خاڵی $(4, 2)$ دا هەبێت.

23 **نیشتنەوەی فڕۆکە** فڕۆکەیەك دەستیکرد بە نیشتنەوە کاتێك لەبەرزی یەك کیلۆمەتر، و لەدووری 4 کیلۆمەتر لە ڕاڕەوی (مدرج) فڕۆکەخانەیەکدا دابوو (سەیری وێنەی بەرامبەر بکە).



أ نەخشە سێجای $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ بدۆزەوە کە لەماوەی $[-4, 0]$ ڕێڕەوی فڕۆکەکە لەماوەی نیشتنەوەی دەنوێنێت؟

ب لە کوێ نیشتنەوەی فڕۆکەکە بەخێراترین تێکرا دەبێت؟

24 ئەوەی دێت دیاریبکە: ئەگەر f نەخشەیەکی سێجایی بێت و 3 شیکاری ڕاستی جیاوازی هەبێت، ئەوا خاڵی وەرگەڕانی هەیەو پۆی ئەو خاڵە دەکاتە ناوەندی هەرسێ شیکارەکانی نەخشەکە.

ڕاست یان هەڵە؟ لە ڕاهێنانی 25 تاکو 28، دیاربکە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە شیبکەوە یان ئەگەر هەڵەیە بەدژە نموونەیەك بسەلمێنە.

25 بۆ هەر نەخشەیەکی سێجا یەك خاڵی وەرگەڕان هەیە.

26 ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = \frac{1}{x}$ قۆقزە کاتێك $x < 0$ و قۆپاوە کاتێك $x > 0$ و خاڵی وەرگەڕانی لە $x = 0$ دا هەیە.

27 ئەگەر $f'(c) > 0$ ئەوا نەخشەی f لە $x = c$ قۆپاوە.

28 ئەگەر $f''(2) = 0$، ئەوا ڕوونکردنەوەی نەخشەی f خاڵی وەرگەڕانی لە $x = 2$ دا هەیە.

3-4 ئامانجەکان لە بێپایان

Limits at Infinity

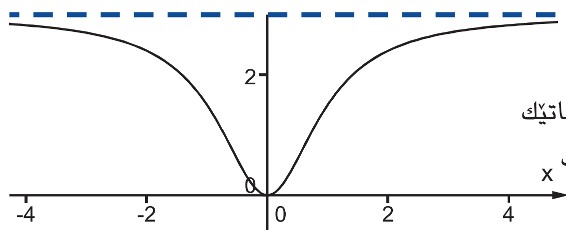
ئامانجەکان

- ئامانجە دیاریکراوەکان لە بێپایان دەدۆزیتەوە.
- دەرکەنارە ئاسۆییەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشە ئەگەر هەبوو دەدۆزیتەوە.
- ئامانجە دیارینەکراوەکان لە بێپایان دەدۆزیتەوە.

زاراوەکان
Vocabulary

دەرکەنارە ئاسۆییەکان
Horizontal Asymptotes

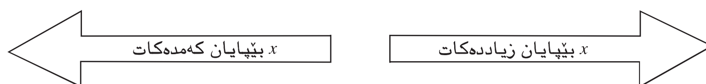
دەرکەنارە ستوونییەکان
Vertical Asymptotes



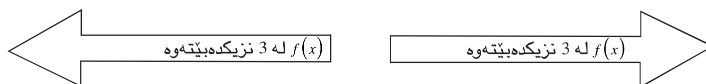
ئامانجەکان لە بێپایان

لەم وانەیەدا لەسیفەتی نەخشە دەکۆڵینەوە کاتێک بەهای x بێپایان زیاددەکات یان کەمدەکات ئەمەش بەم شێوەیە دەردەبڕین، کاتێک $(x\to+\infty)$ یان $(x\to-\infty)$

لە وێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{3x^2}{x^2+1}$ دەردەکەوێت، هەروەها ئەوە دەردەکەوێت کە بەهای $f(x)$ لە 3 نزیکدەبێتەوە کاتێک x زیاددەکات یان کەمدەکات تابێپایان، دەتوانیت بەژمارەیی بگەیتە هەمان ئەنجام هەروەک لە خوارەوە دەردەکەوێت.



x	$-\infty\leftarrow$	-100	-10	-1	0	1	10	100	$\to+\infty$
$f(x)$	$3\leftarrow$	2.9997	2.97	1.5	0	1.5	2.97	2.9997	$\to 3$



لە خشتەکە وا دەردەکەوێت کەبەهای $f(x)$ لە 3 نزیکدەبێتەوە کاتێک x بێسنوور زیاددەکات$(x\to+\infty)$ یان کاتێک x بێسنوور کەمدەکات$(x\to-\infty)$ئەم دوو ئامانجە لە بێپایان بەم شێوەی خوارەوە دەنووسین.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$$ ئامانجی $f(x)$ لە بێپایانی سالب.

و

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$$ ئامانجی $f(x)$ لە بێپایانی موجەب.

دەرکەنارە ئاسۆییەکان

لە نەخشەی $f(x)=\frac{3x^2}{x^2+1}$ بینیمان، ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەڕاستەهێڵی $y=3$ نزیکدەبێتەوە کاتێک x بێسنوور زیاددەکات بەو ڕاستەهێڵە دەوترێت دەرکەناری **ئاسۆیی** بۆ ڕوونکردنەوەی نەخشەکە.

پێناسەی دەرکەناری ئاسۆیی

ڕاستەهێڵی $y=a$ دەرکەناری ئاسۆییە بۆ ڕوونکردنەوەی نەخشەی$f(x)$ ئەگەر $\lim_{x\to-\infty} f(x)=a$ یان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$

لەلایەکی ترەوە ئامانجەکان لە بێپایان هەمان ئەو سیفەتانەیان هەیە کە ئامانجەکان لە $x=c$ هەیانە کە c ژمارەیەکی ڕاستییە هەروەها سیفەتی دیکەی هەیە وەک

ئامانجەکان لە بێپایان

- ئەگەر r ژمارەیەکی ڕێژەیی موجەب بێت، ئەوا $\lim_{x\to+\infty}\frac{c}{x^r}=0$
- ئەگەر r ژمارەیەکی ڕێژەیی موجەب بێت، وئەگەر x^r لە بەهایەکانی x ی سالب پێناسەکرابێت ئەوا $\lim_{x\to-\infty}\frac{c}{x^r}=0$.

نموونە 1 دۆزینەوەی ئامانج لە بێپایان

ئامانجی $\lim_{x\to+\infty}\left(5-\frac{2}{x^2}\right)$ بدۆزەوە.

شیکار بەپێی سیفەتەکانی ئامانجەکان و سەلمێنراوی پێشوو.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(5-\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}5-\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=5-0=5$$



.1 $\lim_{x\to+\infty}\left(5-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$ بدۆزەوە.

نموونە 2 دۆزینەوەی ئامانج لە بێپایان

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+1}$ بدۆزەوە.

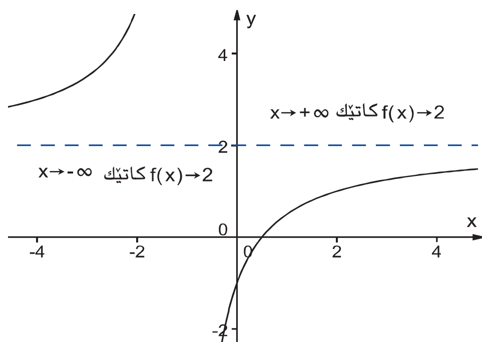
شیکار سەرنجبدە هەریەکە لەسەرەو ژێرە بەرەو $+\infty$ دەچێت کاتێك x بێسنوور زیاددەکات.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+1}=\frac{\lim_{x\to+\infty}(2x-1)}{\lim_{x\to+\infty}(x+1)}\to\frac{+\infty}{+\infty}$$

ئەوەش بارێکە لەبارەکانی نادیار، بۆ شیکاری ئەو پرسیارە، واتە بۆ لابردنی نادیاری هەریەکە لەسەرە و ژێرە بەسەر x دابەشبکە.

سوود

کاتێك شێوەیەکی دیارینەکراوت دێتە پێش وەك نموونە 2، سەرە وژێرە بەسەر ئەو x ی گەورەترین هێزی هەیە لە ژێرەدا دابەشبکە.



$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\frac{\lim_{x\to+\infty}2-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=\frac{2-0}{1+0}=2$$

هەروەها ڕاستەهێڵی $y=2$ دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکەیە لەلای ڕاست. ئەگەر بەدوای ئامانجی نەخشەکە بگەڕێیت کاتێك x بێسنوور کەمدەکات،

دەبینیت کە $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x+1}=2$ و ڕاستەهێڵی $y=2$ ئەویش دەبێتە دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکە لەلای چەپ.



.2 $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}$ بدۆزەوە.

نموونــــه 3 بەراوردکردنی سێ نەخشەی ڕێژەیی

ئەم سێ ئامانجەی خوارەوە بدۆزەوە.

أ $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{3x^2+1}$ ب $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+5}{3x^2+1}$ ج $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+5}{3x^2+1}$

شیکار

أ هەریەك لە سەرەو ژێرە بەسەر x^2 دابەشبکە.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x+5}{x^2}}{\frac{3x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{0+0}{3+0}=0$$

ب هەریەك لە سەرەو ژێرە بەسەر x^2 دابەشبکە.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+5}{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2+5}{x^2}}{\frac{3x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{2+0}{3+0}=\frac{2}{3}$$

ج هەریەك لە سەرەو ژێرە بەسەر x^2 دابەشبکە.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+5}{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^3+5}{x^2}}{\frac{3x^2+1}{x^2}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{+\infty}{3}=+\infty$$

بۆت دەردەکەوێت کە ئامانجی سێیەم دیارینەکراوە، چونکە سەرەکەی بێسنوور زیاددەکات، لەکاتێکدا ژێرەکەی نەگۆڕە.

دیاریکردنی دەرکەنارە ئاسۆییەکانی نەخشە ڕێژەییەکان کاتێك کۆلکەیەکی هاوبەش نێوان سەرەو ژێرە نەبێت

1. ئەگەر پلەی سەرە لەپلەی ژێرە کەمتربێت، ئەوا ڕاستەهێڵی $y=0$ دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکەیە.
2. ئەگەر پلەی سەرە یەکسان بێت بەپلەی ژێرە، ئەوا ڕاستەهێڵی $y=\frac{a}{b}$ دەکاتە دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکە، کاتێك a هاوکۆڵکەی سەرەکی سەرەیە و b هاوکۆڵکەی سەرەکی ژێرەیە.
3. ئەگەر پلەی سەرە لەپلەی ژێرە زیاتربێت. ئەوا نەخشەکە دەرکەناری ئاسۆیی نابێت.

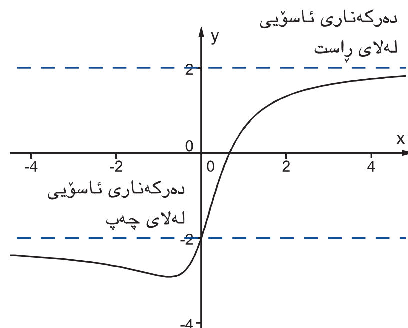


3. ئایا نەخشەی $f(x)=\frac{5x^3-2x^2}{x-2x^3}$ دەرکەناری ئاسۆیی هەیە ئەگەر وەڵامەکەت بەڵێیە، هاوکێشەکەی بدۆزەوە.

لە نموونەکانی پێشوو تێبینی ئەمانەت کرد: ئەگەر ڕاستەهێڵی $y=a$ دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکە بێت لەلای ڕاست، ئەوا بەهەمان شێوە دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکە دەبێت لەلای چەپ. ئەمەش بۆ هەموو نەخشەیەکی ڕێژەیی ڕاستە، بەڵام بۆ نەخشەکانی تر ڕاست نابێت، هەروەك لەنموونەی 4 دا دەردەکەوێت.

نموونــــه 4 نەخشەیەک دوو دەرکەناری ئاسۆیی جیاوازی هەیە

هەریەکە لەم دوو ئامانجەی دێت بدۆزەوە، دوو هاوکێشەی هەردوو دەرکەنارە ئاسۆییەکە بۆ ڕوونکردنەوەی نەخشە $y=\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$ بدۆزەوە.



أ $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$

ب $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$

شیکار

أ ئەگەر $x>0$ دەتوانیت بنووسیت $x=\sqrt{x^2}$ و ئەگەر سەرەو ژێرە بەسەر x دابەشبکەیت ئەوا

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x-2}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=\frac{3-0}{\sqrt{2+0}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

کەواتە $y=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ بریتییە لە دەرکەناری ئاسۆیی لای ڕاست.

ب ئەگەر $x<0$ دەتوانیت بنووسیت $x=-\sqrt{x^2}$ و ئەگەر سەرەو ژێرە بەسەر x دابەشبکەیت ئەوا

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3x-2}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{-\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{3-0}{\sqrt{2+0}}=-\frac{3}{\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

کەواتە $y=\frac{-3\sqrt{2}}{2}$ بریتییە لە دەرکەناری ئاسۆیی لای چەپ.



4. دەرکەنارە ئاسۆییەکانی نەخشەی $f(x)=\frac{5x-3}{\sqrt{3x^2+2}}$ بدۆزەوە.

ئامانجە دیارینەکراوەکان $\pm\infty$

زۆر نەخشە هەیە بەهایەکانی لە ئامانجی دیاریکراو نزیک نابێتەوە کاتێک x بێسنوور زیاددەکات یان کەمدەکات. لەو نەخشانەش نەخشە ڕادەدارەکانە ئەو پێناسەی خوارەوە بەکاردەهێنرێت بۆ باسکردنی سیفەتی نەخشە ڕادەدارەکان یان ئەوانی تر لە $\pm\infty$.

پێناسەی ئامانجە دیارینەکراوەکان لە $\pm\infty$

1. نووسینی $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ئەوە دەردەبرێت کە بەهای $f(x)$ بێسنوور زیاددەکات کاتێک x بێسنوور زیاددەکات.

2. نووسینی $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ئەوە دەردەبرێت کە بەهای $f(x)$ بێسنوور کەمدەکات کاتێک x بێسنوور زیاددەکات.

هەردوو نووسینی $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ بەهەمان ڕێگا پێناسە دەکرێت.

نموونـــه 5

دۆزینەوەی ئامانجە دیارینەکراوەکان لە ±∞

ئەمانەی دێت بدۆزەوە.

أ $\lim_{x\to+\infty} x^3$ **ب** $\lim_{x\to-\infty} x^3$

شیکار

أ کاتێك x بێسنوور زیاددەکات ئەوا x^3 بێسنوور زیاددەکات ئەمەش دەبێتە $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

ب کاتێك x بێسنوور کەمدەکات ئەوا x^3 بێسنوور کەمدەکات ئەمەش دەبێتە $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = x^3$ ئەو ئەنجامانە دەسەلمێنێت.

خاڵی چاودێری 5. ئەنجامی ئەمانەی دێت بدۆزەوە. أ $\lim_{x\to+\infty} x^2$ ب $\lim_{x\to-\infty} x^2$

نموونـــه 6

دۆزینەوەی ئامانجە دیارینەکراوەکان لە ±∞

ئامانجی ئەمانەی دێت بدۆزەوە.

أ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-4x}{x+1}$

ب $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-4x}{x+1}$

شیکار

سەرە بەسەر ژێرەدا دابەشبکە.

$$\frac{2x^2-4x}{x+1} = 2x-6+\frac{6}{x+1}$$

أ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-4x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\left(2x-6+\frac{6}{x+1}\right) = +\infty$

ب $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-4x}{x+1} = \lim_{x\to-\infty}\left(2x-6+\frac{6}{x+1}\right) = -\infty$

ئەو ئەنجامانە ئەوە دەردەخات کە سیفەتی نەخشەی $f(x) = \frac{2x^2-4x}{x+1}$ لە ±∞ هەمان سیفەتی نەخشەی $g(x) = 2x-6$ هەیە. لەوانەکانی داهاتوو ئەم جۆر ئامانجانە بە ڕوونکردنەوەیی فێردەبیت و دەردەکەوێت کە ڕاستەهێڵی $y = 2x-6$ دەرکەناری لارە Slant asymptote بۆ ڕوونکردنەوەی نەخشەکە وەك لەوێنەی سەرەوەدا دەردەکەوێت.

خاڵی چاودێری 6. ئەمانەی دێت بدۆزەوە. أ $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2-x+1}{x-1}$ ب $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-4x}{x+1}$

نموونـــه 7 دۆزینەوەی ئامانجەکانی نەخشە سێگۆشەییەکان لە $\pm\infty$

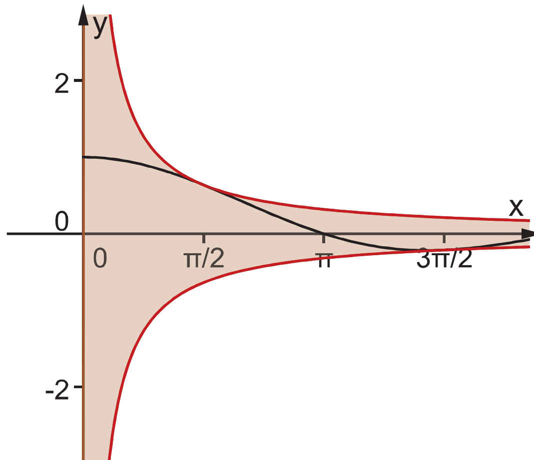
ئەنجامی ئەمانەی دێت بدۆزەوە.

أ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$

ب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$

شیکار

أ کاتێك بەهای x بە ئاڕاستەی $+\infty$ زیاددەکات، بەهای نەخشەی $\sin x$ لەنێوان -1 و 1 بە بەردەوامی دووبارە دەبێتەوە بۆیە $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ ئامانجی نییە.



ب لەبەرئەوەی $-1 \le \sin x \le 1$ و

لەبەرئەوەی $x > 0$ کاتێك x لە $+\infty$

نزیکدەبێتەوە، ئەوا $\frac{-1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$

بەڵام $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

کەواتە بەپێی سەلمێنراوی

دوومەرج ئەوا $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

هەروەك لە وێنەی بەرامبەر

دەردەکەوێت.



7. ئەنجامی ئەمانەی دێت بدۆزەوە. أ $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ ب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x}$

3-4 ڕاهێنان

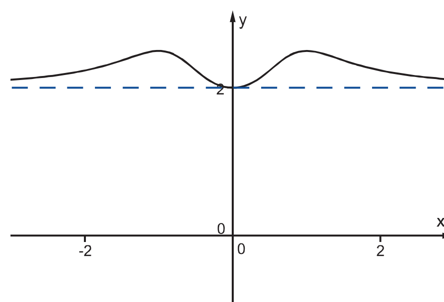
لە ڕاهێنانی 1 تا 2 بەشێوازی خۆت ڕوونیبکەوە.

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$

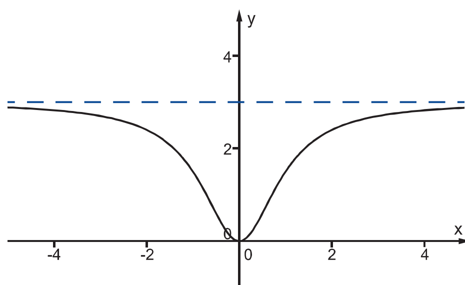
2 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

لە ڕاهێنانی 3 تا 6، ڕوونکردنەوەی هەر نەخشەیەك بە بەکارهێنانی دەرکەنارە ئاسۆییەکان دیاربکە.

أ

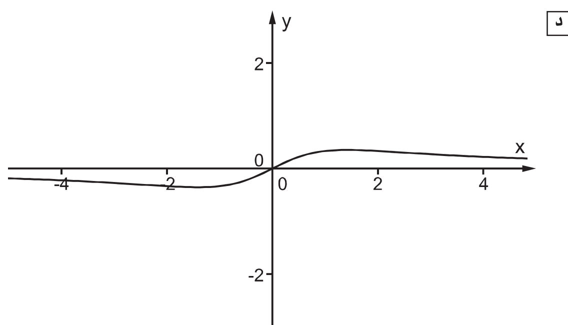


ب



ج

د



3 $f(x)=\frac{x}{x^2+2}$

4 $f(x)\frac{3x^2}{x^2+2}$

5 $f(x)=\frac{2x^2-3x+5}{x^2+1}$

6 $f(x)=2+\frac{x^2}{x^4+1}$

7 ئەنجامی ئەمانەی دێت بدۆزەوە کاتێك $f(x)=5x^3-3x^2+10$

أ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$ ب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3}$ ج $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^4}$

لە پرسیاری 8 تاکو 15 ئامانجە داواکراوەکە بدۆزەوە.

8 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{3x+2}$

9 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^3+2}{9x^3-3x^2+7}$

10 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{x+3}$

11 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x-\frac{4}{x^2}\right)$

12 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-x}}$

13 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}$

14 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x+\sin x}$

15 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin 2x}{x}$

دەربارەی چەمکەکان

16 نەخشەی f بەردەوامە. پاسادانی $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=5$ دەکات. ئەگەر دەکرێت $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ لەم دووبارەدا بدۆزەوە.

أ ڕوونکردنەوەی نەخشەی f هاوجێیە لەگەڵ تەوەری y.

ب ڕوونکردنەوەی نەخشەی f هاوجێیە لەگەڵ خاڵی بنەڕەت.

لە پرسیاری 17 تاکو 22 یەکتربڕینەکان لەگەڵ دوو تەوەری پۆتانەکان و هاوجێبوونەکان و دەرکەنارەکان دیاربکە.

17 $f(x)=\frac{2+x}{1-x}$

18 $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$

19 $f(x)=\frac{x^2}{x^2-9}$

20 $f(x)=2-\frac{3}{x^2}$

21 $f(x)=3+\frac{2}{x}$

22 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

ڕاست یان هەڵە؟ لە دوو پرسیاری 23 و 24، دیاریبکە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە ئەگەر هەڵەیە بە دژە نموونەیەك بیسەلمێنە.

23 ئەگەر $f'(x)>0$ بەهای x هەرچەندبێت، ئەوا نەخشەی f بێسنوور ڕوو لە زیاد دەکات

24 ئەگەر $f'(x)<0$ بەهای x هەرچەندبێت، ئەوا نەخشەی f بێسنوور کەمدەکات

بەشی 4

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

4–1 ڕوو لەزیادبوون و ڕوو لە کەمبوونی نەخشەکان

1 ماوەکانی ڕوو لەزیادبوون و ڕوو لەکەمبوونی هەر نەخشەیەك دیاریبکە.

أ $f(x)=x^3-x$

ب $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

ج $f(x)=x+\cos 2x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

4–2 بەهایەکانی کۆتایی

2 خشتەی گۆڕان بۆ هەریەك لەم نەخشانەی دێت دروستبکە و بەهایەکانی گەورەترین و بەهایەکانی بچووکترین خۆجێییەکەی بدۆزەوە.

أ $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x$

ب $f(x)=\sin^2 x\left(-\frac{\pi}{2}<x\leq\frac{\pi}{2}\right)$

4–2 خاڵەکانی وەرگەڕان

3 خاڵەکانی وەرگەڕان بۆ هەریەکە لەم نەخشانەی دێت دیاریبکە، وماوە کراوەکان کە نەخشەکە تێیدا قۆقزە یان قۆپاوە دیاریبکە.

أ $f(x)=2x^3-3x^2$

ب $f(x)=2\cos(\pi x)\quad(0\leq x\leq 2)$

4 بەهایەکانی هەریەکە لە a ، b ، c بدۆزەوە ئەگەر بزانیت نەخشەی $f(x)=ax^3+bx^2+c$ لە $x=-1$ خاڵی وەرگەڕانی هەیەو لێکەوتەکەی لەو خاڵەدا بریتییە لە $y=-3x-1$.

5 ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە، یان چەوتە بەدژە نموونە بیسەلمێنە.

أ خاڵی $(1, 0)$ بریتییە لە خاڵی وەرگەڕانی نەخشەی $f(x)=(x-1)^4$.

ب ئەگەر $f''(c)>0$، ئەوا لاری لێکەوتی چەماوەی نەخشەکە موجەبە لە $x=c$.

4–3 ئامانجەکان لە بێپایان

6 هەر ئامانجێك بدۆزەوە.

أ $\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-2x)^2}{2x^2+1}$

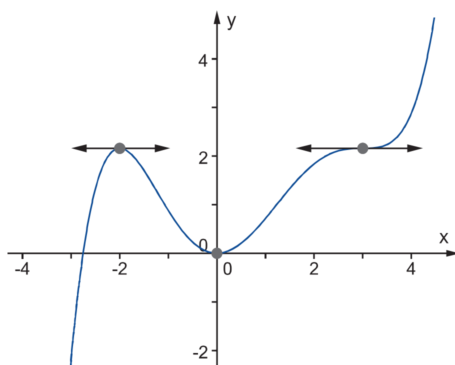
ب $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2x^2}-1+3x\right)$

ج $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x-1}{|x-2|}$

4–3 خشتەی گۆڕان

7 لە وێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ دەردەکەوێت. خشتەی خوارەوە تەواوبکە بەدیاریکردنی نیشانەکانی هەر بەهایەك (موجەب ، سالب، سفر).

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
$x=-2$			
$x=0$			
$x=3$			
$x=-3$			
$x=4$			



4-4

وێنە ڕوونکردنەوەییەکانی نەخشە

Curve Sketching

ئامانجەکان

• نەخشە شیدەکاتەوە و ڕوونکردنەوەکەی دەکێشێت.

زاراوەکان

Vocabulary

دەرکەناری لار

Slant Asymptote

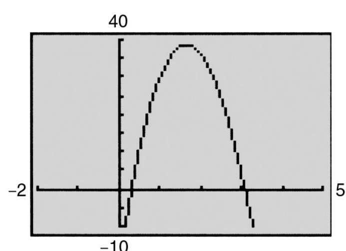
شیکردنەوەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکان

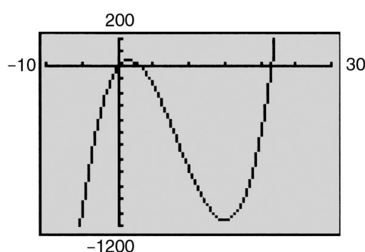
ناکرێت گرنگی بەکارهێنانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکان لەبیرکاریدا فەرامۆش بکرێت، ئەندازەی شیکردنەوە کە زانای فەرەنسی دیکارت دایهێنا، بۆ پێشخستن و هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری لە ناوەڕاستی سەدەی حەڤدەم سەرەتای ئەم پێشکەوتنە بوو، و لەسەر ئەم کارەش زانای بیرکاری فەرەنسی لاگرانج ئەمەی بەم شێوەیە دەربڕی «کاتێك جەبرو ئەندازە هەریەکەیان لە خولگەی تایبەتی خۆی کاریان دەکرد، پێشکەوتنی هەریەکەیان لەسەرخۆ بوو و جێبەجێکردنەکانیان کەمبوو. بەیەك گەیشتنیان بووە هۆی تەواوکەرو بەهێزکردنی هەریەکەیان بۆ ئەوی تریان».

تاکو ئێستا زۆر لە چەمکەکان فێربوویت کە لە شیکردنەوەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکان یارمەتیدەدات.

• یەکتربڕینەکان لەگەڵ دوو تەوەری پۆتانەکان.
• هاوجێبوون.
• بوار و مەودا (لە هەندێ لە بارەکاندا)
• بەردەوامی.
• دەرکەنارە ستوونییەکان.
• داتاشراو.
• بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی.
• خاڵەکانی وەرگەڕان.
• دەرکەنارەکان.
• ئامانجەکان لە بێپایان.

کاتێك وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشە بەدەست «یان بەبژمێری ڕوونکردنەوەیی» دەکێشێت، ئەوە بزانە کە وێنەی بەشێك لە چەماوەکە دەکێشێت، و ناتوانیت وێنەکە بەتەواوی بکێشێت بڕیاردانت بۆ دیاریکردنی ئەو بەشەی لە ڕوونکردنەوەکە کە دەکێشێت بڕیارێکی گرنگە. سەیری هەردوو وێنەی بەرامبەربکە، بەڕای تۆ کامیان بەشێوەیەکی باشتر نەخشەی $f(x) = x^3 - 25x^2 + 74x - 2$ دەنوێنێت؟





ئاشکرایە کە وێنەی دووەم نەخشەکە بەشێوەیەکی باشتر دەنوێنێت، بەڵام ئایا وێنەی سێیەم هەیە کە بەشە گرنگەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە دەربخات؟ بۆ وەڵامدانەوەی ئەم پرسیارە پێویستت بە بەکارهێنانی جیاکاری دەبێت بۆ ئەوەی داتاشراوی یەکەم و داتاشراوی دووەمی نەخشەکە لێکبدەیتەوە.

ئەمانەی دێت چەند ڕێنماییەکە، بۆ ئەوەی ئەو بەشەی لە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەوێنەکەت دەردەکەوێت دیاریکردنێکی باش بێت، پێویستە بەشەکە ئەوانەی لەم ڕێنمایانە هاتووە دەربخات.

ڕێنماییەکانی شیکردنەوەی ڕوونکردنەوەی نەخشەیەك

1. بوار و مەودای نەخشەکە دیاریبکە.

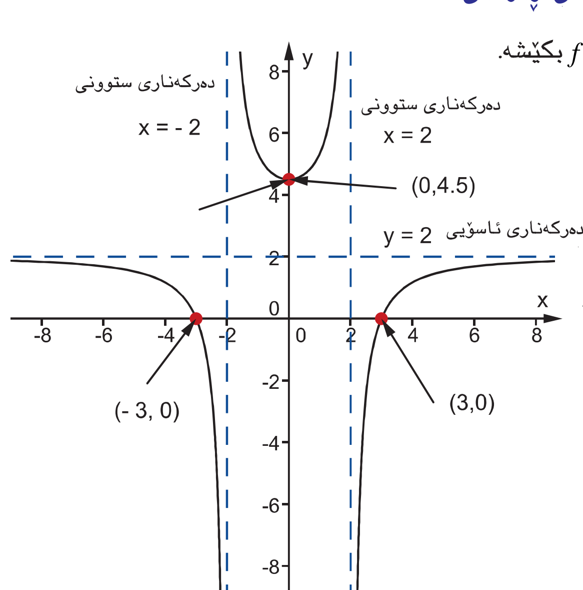
2. یەکتربڕینەکانی نەخشەکە لەگەڵ هەردوو تەوەری پۆوتانەکان و دەرکەنارەکان و هاوجێبوون دیاربکە.

3. بەهایەکانی x کە $f'(x)$ و $f''(x)$ دەکاتە 0 یان بوونی نییە، دیاربکە، ئەم ئەنجامانە بۆ دیاریکردنی بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی و خاڵەکانی وەرگەڕانی نەخشەکە بەکاربهێنە.

نموونـــــه 1

وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشەی ڕێژەیی

ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\dfrac{2(x^2-9)}{x^2-4}$ بکێشە.



شیکار

داتاشراوی یەکەم: $f'(x)=\dfrac{20x}{(x^2-4)^2}$

داتاشراوی دووەم: $f''(x)=\dfrac{-20(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$

یەکتربڕینە ئاسۆییەکان: $(-3,0)$ و $(3,0)$

یەکتربڕینە ستونییەکان: $\left(0,\frac{9}{2}\right)$

دەرکەنارە ستوونییەکان: $x=-2$ و $x=2$

دەرکەنارە ئاسۆییەکان: $y=2$

بەهایە شلۆقەکان: $x=0$

خاڵەکانی وەرگەڕان: نییە.

بوارەکەی: هەموو ژمارە ڕاستییەکان جگەلە -2 و 2

هاوجێبوون: هاوجێیە لەگەڵ تەوەری y

ماوەکانی تاقیکردنەوە و بەهایەکانی $]-\infty,-2[$ ، -2 ، $]-2,0[$ ، 0 ، $]0,2[$ ، 2 ، $]2,+\infty[$

ئەم خشتەی خوارەوە چۆنیەتی بەکارهێنانی ماوەکان و بەهایەکانی تاقیکردنەوە نیشاندەدات بۆ دیاریکردنی سیفەتەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکەی سەرەوە.

سیفەتەکانی چەماوەکە	$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	x
ڕوو لەکەمبوونە، قۆقزە	$-$	$-$		$-\infty<x<-2$
دەرکەناری ستوونی	پێناسەنەکراوە	پێناسەنەکراوە	پێناسەنەکراوە	$x=-2$
ڕوو لەکەمبوونە، قۆپاوە	$+$	$-$		$-2<x<0$
بەهای بچووکترین خۆجێی	$+$	0	4.5	$x=0$
ڕوو لەزیادبوونە، قوپاوە	$+$	$+$		$0<x<2$
دەرکەناری ستوونی	پێناسەنەکراوە	پێناسەنەکراوە	پێناسەنەکراوە	$x=2$
ڕوو لە زیادبوونە: قۆقزە	$-$	$+$		$2<x<+\infty$

دڵنیابە کە لە مەبەستی دروستکردنی خشتەی پێشوو تێگەیشتیت. بە سوود وەرگرتن لە جیاکاری دەتوانیت دڵنیابیت لەوەی کە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بەهایەکانی کۆتایی یان خاڵەکانی وەرگەڕانی نییە، جگە لەوانەی کە لە خشتەکەدا هاتووە.



1. وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\dfrac{3(x-2)}{x^2-1}$ بکێشە.

نموونـــــه 2 وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشەیەکی ڕێژەیی

$f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$ بدۆزەوە.

شیکار

داتاشراوی یەکەم: $f'(x)=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

یەکتربڕینە ئاسۆییەکان: نییە.

دەرکەنارە ستوونییەکان: $x=2$

بەهایە شلۆقەکان: $x=0$ و $x=4$

داتاشراوی دووەم: $f''(x)=\dfrac{8}{(x-2)^3}$

یەکتربڕینە ستوونییەکان: $(0,-2)$

دەرکەنارە ئاسۆییەکان: نییە

خاڵەکانی وەرگەڕان: نییە

بوارەکەی: هەموو ژمارە ڕاستەییەکانە جگە لە $x=2$.

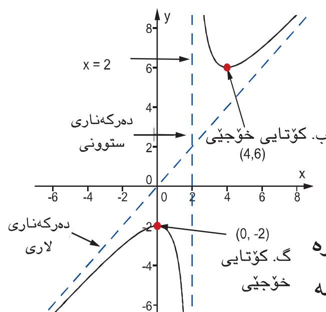
ماوەکانی تاقیکردنەوەو بەهایەکانی $]-\infty,0[$ ، 0 ، $]0,2[$ ، 2 ، $]2,4[$ ، 4 ، $]4,+\infty[$

ئەم نەخشەیە چۆنیەتی بەکارهێنانی ماوەکان و بەهایەکانی تاقیکردنەوە نیشاندەدات بۆ دیاریکردنی سیفەتەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	سیفەتەکانی چەماوەکە
$-\infty<x<0$		+	−	ڕوو لەزیادبوونە، قۆقزە
$x=0$	−2	0	−	بەهای گەورەترین خۆجێی
$0<x<2$	−	−	−	ڕوو لەکەمبوونە، قۆقزە
$x=2$	پێناسەنەکراوە	پێناسەنەکراوە	پێناسەنەکراوە	دەرکەناری ستوونی
$2<x<4$		−	+	ڕوو لەکەمبوونە، قۆپاوە
$x=4$	6	0	+	بەهای بچووکترین خۆجێی
$4<x<+\infty$		+	+	ڕوو لەزیادبوونە، قۆپاوە

دەرکەنارە لارییەکان

لە نموونەی 2 چەماوەی نەخشەکە دەرکەناری ئاسۆیی نییە، بەڵام دەرکەناری لاری هەیە. ڕوونکردنەوەی نەخشە ڕێژییەکە (کە لەنێوان سەرو ژێرەکەی هاوکۆڵکەی هاوبەش نییە، پلەی ژێرەکەی لە 1 کەمتر نییە) دەرکەناری لاری هەیە ئەگەر پلەی سەرەکەی لە پلەی ژێرەکەی بە 1 زیادبێت، بۆ دۆزینەوەی دەرکەنارە لارەکە. دابەشی درێژ بەکاربهێنە بۆ نووسینی هاوکێشەی نەخشەکە وەك سەرجەمی ڕادەداری لە پلە یەك لەگەڵ نەخشەیەکی تری ڕێژەیی کە پلەی سەرەکەی لە پلەی ژێرەکەی کەمتربێت.



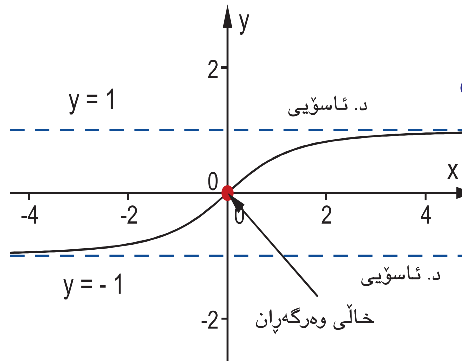
$f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$ هاوکێشەی نەخشەکە بنووسە.

$f(x)=x+\dfrac{4}{x-2}$ دوای دابەشکردنەکە نەخشەکە بنووسەوە.

ڕوونکردنەوەی بەرامبەر پوختەی پێدراوەکانی خشتەی سەرەوە و دەرکەنارە لارەکەی $y=x$



2. وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{3x^2-5x+3}{3x-2}$ بکێشە.



نموونـــــە 3 وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشەی ڕەگی

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ بکێشە.

شیکار

$$f'(x)=\frac{2}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}} \text{ و } f''(x)=-\frac{6x}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}$$

ڕوونکردنەوەکە یەك یەکتربڕینی لە خاڵی$(0,0)$ دا هەیە، دەرکەناری ستوونی نییە بەڵام دوو دەرکەناری ئاسۆیی هەیە.$y=-1$ ،$y=1$ نەخشەکە بەهایەکانی شلۆقی نییە. لەوانەیە خاڵێکی وەرگەڕانی لە $x=0$ دا هەبێت بواری نەخشەکە بریتییە لە کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکان ڕوونکردنەوەکەی لەگەڵ خاڵی بنەڕەت هاوجێیە.

سیفەتی ڕوونکردنەوە	$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	x
ڕوو لەزیادبوونە، قۆپاوە	+	+		$-\infty<x<0$
خاڵی وەرگەڕان	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$x=0$
ڕوو لەزیادبوونە، قۆقزە	−	+		$0<x<+\infty$

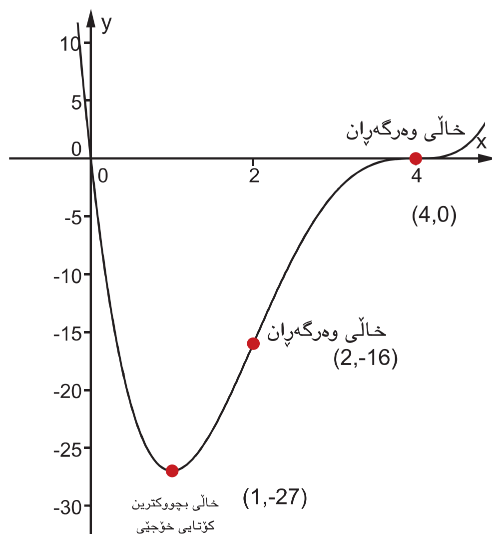


3. وێنەی ڕوونکردنەوەی $f(x)=\frac{-2x}{\sqrt{x^2+2}}$ بکێشە.

نموونـــــە 4 کێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشە زۆر ڕادەدارەکان

ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^4-12x^3+48x^2-64x$ بکێشە.

شیکار



داتاشراوی یەکەم:$f'(x)=4(x-1)(x-4)^2$

داتاشراوی دووەم:$f''(x)=12(x-4)(x-2)$

یەکتربڕینە ئاسۆییەکان:$(0,0)$ و$(4,0)$

یەکتربڕینە ستوونییەکان:$(0,0)$

دەرکەنارە ستوونییەکان: نییە.

دەرکەنارە ئاسۆییەکان: نییە.

سیفەتەکەی لە $\pm\infty$: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

دوو بەها شلۆقەکان : $x=1$ و $x=4$

خاڵی وەرگەڕان: $x=2$ و $x=4$

بوارەکەی: کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان.

ماوەکانی گۆڕان بەهایەکەی: $]-\infty,1[$ ، 1 ، $]1,2[$ ، 2 ، $]2,4[$ ، 4 ، $]4,+\infty[$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	سیفەتی ڕوونکردنەوە
$-\infty < x < 1$		$-$	$+$	ڕوو لە کەمبوون، قۆپاوە
$x = 1$	-27	0	$+$	بەهای بچوکترین خۆجێی
$1 < x < 2$		$+$	$+$	ڕوو لە زیادبوون، قۆپاوە
$x = 2$	-16	$+$	0	خاڵی وەرگەڕان
$2 < x < 4$		$+$	$-$	ڕوو لە زیادبوون، قۆقزە
$x = 4$	0	0	0	خاڵی وەرگەڕان
$4 < x < +\infty$		$+$	$+$	ڕوو لە زیادبوون، قۆپاو

نەخشەی ڕادەداری نموونەی 4 بەهای بچوکترین خۆجێی هەیە و بەهای گەورەترین خۆجێی نییە، بەشێوەیەکی گشتی، بۆ نەخشەیەکی ڕادەداری پلە n دەکرێت بەلایەنی زۆر $n-1$ بەهای کۆتایی خۆجێی و بەلایەنی زۆر $n-2$ خاڵی وەرگەڕانی هەبێت. سەرەرای ئەمەش نەخشە ڕادەداره پلە جووتەکان بەلایەنی کەم بەهای کۆتایی خۆجێیان هەیە.

ئەوەی لەپۆلی دەیەم لە نەخشە ڕادەدارەکان خوێندوتە بەبیرخۆت بهێنەوە، کە سیفەتی نەخشە لە بێپایان بە پلەی نەخشەکە و نیشانەی هاوکۆڵکەی سەرەکی دیاردەکرێت، چەماوەی نەخشەی نموونە 4 بەنزیك بوونەوە لە $+\infty$ بێسنوور زیاددەکات چونکە هاوکۆڵکە سەرەکییەکەی موجەبە. و بەنزیك بوونەوە لە $-\infty$ بێسنوور زیاددەکات. چونکە پلەی نەخشەکە جووتە.



4. وێنەی ڕوونکردنەوەی $f(x) = 5x^3 - 15x$ بکێشە.

نموونــــە 5 وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشە سێگۆشەییەکان

وێنەی چەماوەی $f(x) = \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ بکێشە.

شیکار

لەبەرئەوەی نەخشەکە دووبارەبوونەوەیە و ماوەی دووبارەبوونەوەکەی 2π ـە، دەتوانیت لە نەخشەکە بکۆڵییەوە لە ماوەیەك کە مەوداکەی 2π بێت، ماوەی $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ هەڵبژێرە.

بوار: کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان جگە لە $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ کاتێك $n \in I$

داتاشراوی یەکەم: $f'(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos^2 x}$ داتاشراوی دووەم: $f''(x) = \dfrac{(1-\sin x)^2}{\cos^3 x}$

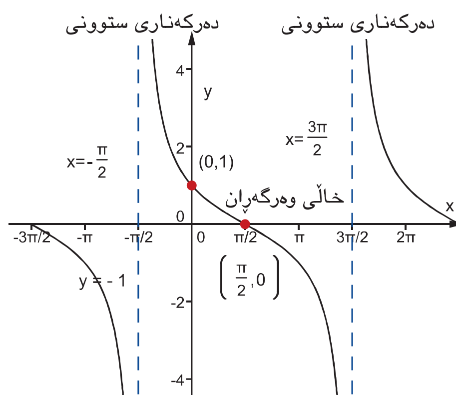
ماوەی دووبارەبوونەوە: 2π یەکتربڕینە ئاسۆییەکان: $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ یەکتربڕینە ستوونییەکان: $(0,1)$

دەرکەنارە ستوونییەکان: $x = -\frac{\pi}{2}$ $x = \frac{3\pi}{2}$ دەرکەناری ئاسۆیی: نییە بەها شلۆقەکان: نییە

خاڵەکانی وەرگەڕان: $x = \frac{\pi}{2}$

ماوەکانی گۆڕان و بەهایەکەی $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	سیفەتی ڕوونکردنەوە
$x=-\frac{\pi}{2}$	پێناسەنەکراوە	پێناسەنەکراوە	پێناسەنەکراوە	دەرکەناری ستوونی
$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$		$-$	$+$	ڕوو لەکەمبوون، قۆپاوە
$x=\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	خاڵی وەرگەڕان
$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$		$-$	$-$	ڕوو لەکەمبوون، قۆقزە
$x=\frac{3\pi}{2}$	پێناسەنەکراوە	پێناسەنەکراوە	پێناسەنەکراوە	دەرکەناری ستوونی



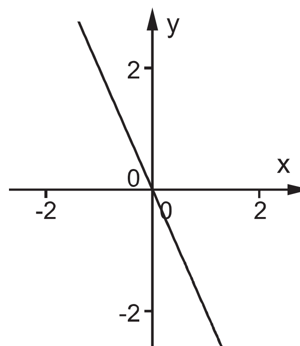


5. وێنەی ڕوونکردنەوەی $f(x)=\frac{1+\cos x}{\sin x}$ بکێشە.

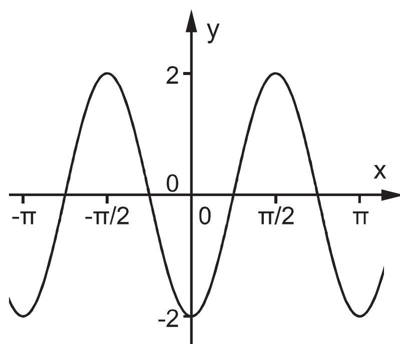
4–4 ڕاهێنان

ڕوونکردنەوەی داتاشراوی هەر نەخشەیەک دیاریبکە.

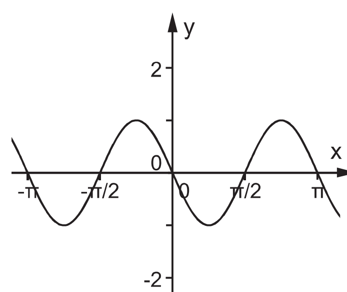
1 نەخشە



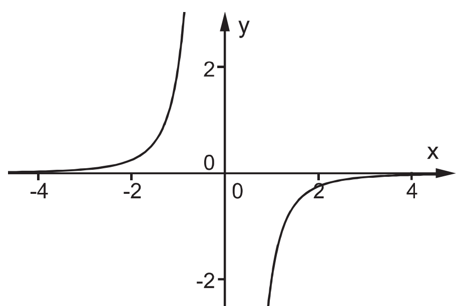
أ داتاشراوەکەی



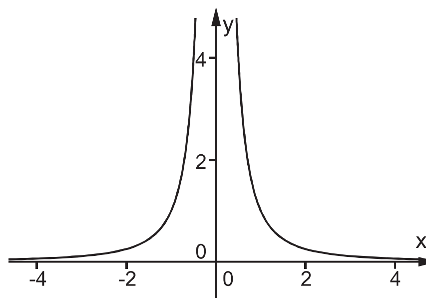
2



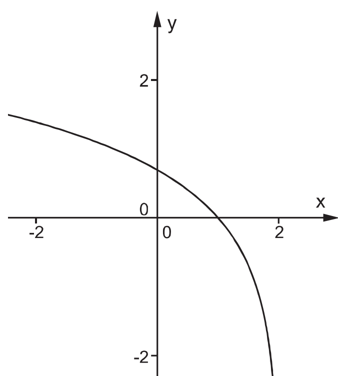
ب



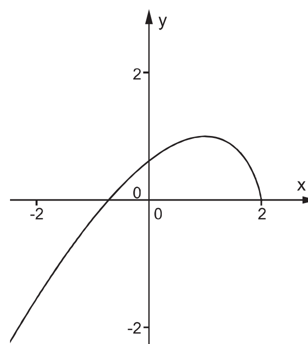
3



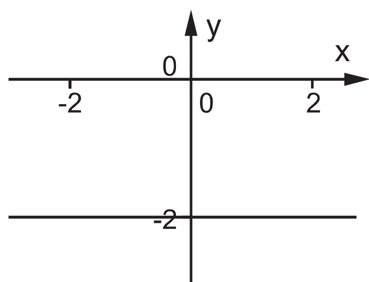
ج



4



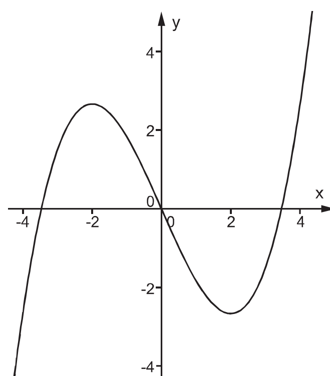
د



5 **خوێندنەوەی ڕوونکردنەوەکان** ئەم وێنەی خوارەوە ڕوونکردنەوەی نەخشەی f دەردەخات.

أ كام لە بەهایەکانی x وادەکات بەهای $f'(x)$ بکاتە 0؟ بکاتە موجەب؟ بکاتە سالب؟

ب كام لە بەهایەکانی x وادەکات بەهای $f''(x)$ بکاتە 0؟ بکاتە موجەب؟ بکاتە سالب؟



ج لە كام ماوەدا $f'(x)$ ڕوو لەزیادبوونە؟

د كام بەهای x وادەکات $f'(x)$ بەهای بچووکترینی هەبێت؟ بەراورد لە نێوان تێکرای گۆڕانی f لەو بەهایەدا لەگەڵ تێکرای گۆڕانی f لە بەهایەکانی تری x بکە. وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

لە ڕاهێنانی 6 تاکو 17 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە.

6 $f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$

7 $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-9}$

8 $f(x)=x+\frac{4}{x^2+1}$

9 $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

10 $f(x)=\frac{x^2-6x+12}{x-4}$

11 $f(x)=x\sqrt{4-x}$

12 $f(x)=3x^{\frac{2}{3}}-2x$

13 $f(x)=2-x-x^3$

14 $f(x)=3x^4+4x^3$

15 $f(x)=|2x-3|$

16 $f(x)=(x-1)^5$

17 $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$

18 ئایا ڕوونکردنەوەی نەخشەکە یەکێك لە دەرکەنارە ستوونییەکانی دەبڕێت؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە

19 ئایا ڕوونکردنەوەی نەخشەکە یەکێك لە دەرکەنارە ئاسۆییەکانی دەبڕێت؟

20 هاوکێشەی نەخشەی $f(x)=\frac{6-2x}{x-3}$ وا ئاماژە دەکات یەك دەرکەناری ستوونی هەیە. هاوکێشەکەی بنووسە؟ وێنەی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشە بکێشە و بیسەلمێنە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە دەرکەناری ستوونی نییە چۆن ئەمە لێکدەدیتەوە؟

بیربکەوە لە هەردوو پرسیاری 21 و 22 ئەو نەخشەی ئەم مەرجانەی خوارەوەی تێدا بەدیدەکرێت بدۆزەوە.

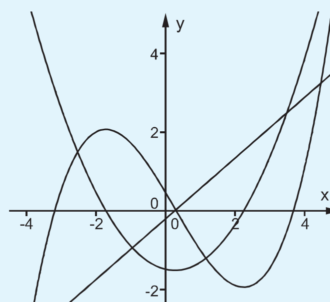
21 نەخشەیەك دەرکەناری ستوونی کە هاوکێشەکەی $x=5$ و دەرکەناری ئاسۆیی هاوکێشەکەی $y=0$ هەبێت.

22 نەخشەیەك دەرکەناری ستوونی $x=5$ و دەرکەناری لار کە هاوکێشەکەی $y=3x+2$ هەبێت.

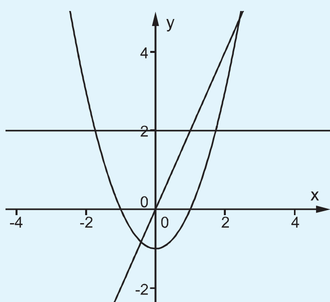
دەربارەی چەمکەکان

لە دوو ڕاهێنانی 23 و 24 لە وێنە ڕوونکردنەوەکان نەخشەی $f(x)$ و داتاشراوی یەکەم $f'(x)$ و داتاشراوی دووەم $f''(x)$ دەردەکەوێت، ڕوونکردنەوەکانی نەخشەکەو داتاشراوی یەکەم و داتاشراوی دووەم جیابکەوە.

23



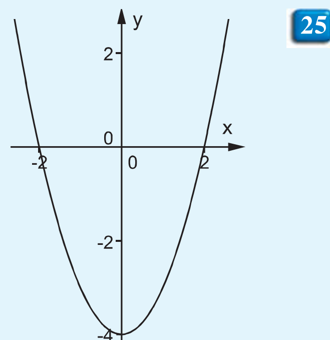
24



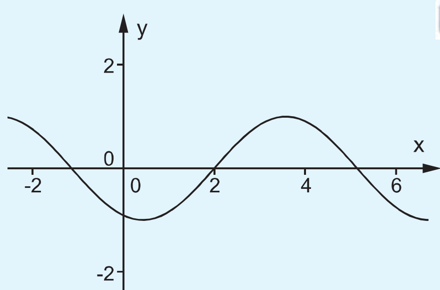
دەربارەی چەمکەکان

لە دوو ڕاهێنانی 25 و 26 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ بەهۆی ڕوونکردنەوەی داتاشراوی یەکەم $f'(x)$ بکێشە.

25

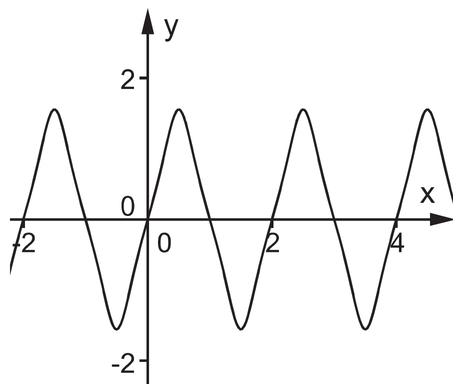


26



27 وا دابنێ کە $f'(x) < 0$ لەماوەی $]2, 8[$. ڕوونبکەوە بۆچی $f(3) > f(5)$؟

28 **خوێندنەوەی ڕوونکردنەوەکان** ڕوونکردنەوەی خوارەوە بریتییە لە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = \tan(\sin \pi x)$.



أ ئایا وێنە ڕوونکردنەوەکە هاوجێیە؟ ئەگەر وایە جۆری هاوجێبوونەکە دیاریبکە.

ب ئایا نەخشەکە دووبارەبوونەوەیە؟ ئەگەر وایە ماوەی دووبارەبوونەوەکەی دیاریبکە.

ج بەهایەکانی کۆتایی بۆ نەخشەکە لەماوەی $]-1, 1[$ دیاریبکە.

د ئایا نەخشەکە خاڵی وەرگەڕانی لەماوەی $]0, 1[$ هەیە. ژمارەیان چەندە؟

5-4 گەڕان بەدوای بەها کۆتاییەکاندا
Optimization

ئامانجەکان

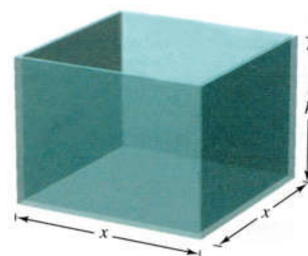
- پرسیارەکانی دیاریکردنی بەهایەکانی بچوکترین یان بەهایەکانی گەورەترین شیکاردەکات.

پرسیاری بەهایەکانی بچووکترین و بەهایەکانی گەورەترین

شیکارکردنی پرسیارەکانی گەورەترین کۆتایی و بچووکترین کۆتایی، بەیەکێك لە گرنگترین جێبەجێکردنەکانی هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری دادەنرێت. بێ گومان گوێبیستی دەستەواژەکانی وەك گەورەترین قازانج یان کەمترین تێچوون و گەلێکی تر و زۆری تر گوێبیست بوویت. پێش ئەوەی بەفراوانی بچینە ناو ئەو بابەتە لەسەر ئەو نموونە دەوەستین.

نموونـــــــە 1 دیاریکردنی گەورەترین قەبارەی قووتویەك

ئەندازیارێك لەیەکێك لە کارگەکان دیزاینی قووتویەکی سەرکراوەی بنکە چوارگۆشە دەکات بۆ ئەوەی ڕووبەرەکەی $675cm^2$ بێت، وەك لەوێنەی لای ڕاست دەردەکەوێت. پێوانەکانی دوورییەکان بدۆزەوە بۆ ئەوەی قووتوەکە گەورەترین قەبارەی هەبێت؟



شیکار

لەبەرئەوەی بنکەی قووتوەکە چوارگۆشەیە قەبارەکەی دەبێتە $V = x^2h$ بەو هاوکێشە دەوترێت هاوکێشەی سەرەکی پرسیارەکە، چونکە پەیوەندییەکمان پێدەدات، بۆ هەژمارکردنی بەها گەورەترینەکەی، لەلایەکی تر ڕووبەری قووتوەکە دەکاتە سەرجەمی ڕووبەری بنکەکەی لەگەڵ چوار تەنیشتە ڕووبەرەکانی واتا $S = x^2 + 4xh$ ، بەڵام ڕووبەری قووتوەکە پێویستە بکاتە $675cm^2$ ئەوەش پەیوەندییەك لەنێوان لایەکی بنکەکەی x و بەرزییەکەی h پێکدەهێنێت.

$$S = x^2 + 4xh = 675$$

لەوەوە دەردەچێت کە $h = \frac{675-x^2}{4x}$ و $V = x^2\left(\frac{675-x^2}{4x}\right) = \frac{675}{4}x - \frac{x^3}{4}$.

پێش دیاریکردنی بەهایەکانی x کە گەورەترین قەبارە دابین دەکات، بواری بەسوود دیاریبکە، واتا ئەو بەهایانەی x دەتوانێت وەریبگرێت. دەزانیت بەهای x سالب نییە و ڕووبەری بنکەکەی x^2 لە 675 تێپەڕناکات، واتا $0 < x \le \sqrt{675}$.

بۆ ئەوەی ئەندازیارەکە گەورەترین قەبارەی دەستبکەوێت دەبێت بەهایەکانی x دیاریبکات کەوادەکات نەخشەی $V(x) = \frac{675x-x^3}{4}$ گەورەترین بەها وەربگرێت، بۆ ئەمەش دەستبکە بە دۆزینەوەی داتاشراوەکە $V'(x)$ و شیکارکردنی هاوکێشەی $V'(x) = 0$.

$$V'(x) = \frac{675-3x^2}{4} = 0$$

$$3x^2 = 675$$

$$x^2 = 225$$

$x = -15$ یان $x = 15$

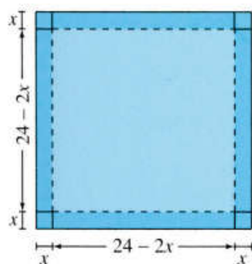
بەهای دوو شلۆقەکە بریتیین لە $x = -15$ و $x = 15$ پێویستە بەهای $x = -15$ فەرامۆشبکەیت چونکە x سالب نییە. بۆ دڵنیابوون لەبەهای شلۆقی $x = 15$ دەگەڕێتەوە بۆ بەهای گەورەترینی نەخشەکە، تاقیکردنەوەی داتاشراوەی دووەم بەکاربهێنە، داتاشراوەی دووەمی نەخشەکە دەکاتە $V''(x) = -\frac{3}{2}x$ و بەهایەکەی لە $x = 15$ دەکاتە $V''(15) = -\frac{3}{2}(15) = -\frac{45}{2} < 0$ کەواتە ئەو خاڵە شلۆقە بۆ بەهای گەورەترین خۆجێی نەخشەکە دەگەڕێتەوە.

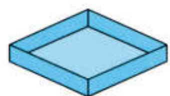
ئەندازیارەکە بۆ لایەکی بنکەی قووتوەکەی 15 cm و بۆ بەرزییەکەی $h = \frac{675-15^2}{4\times15} = 7.5$

هەڵدەبژێرێت، گەورەترین قەبارە دەکاتە $V_{max} = 15\times15\times7.5 = 1687.5cm^3$



1. ئەندازیارێك لەیەك لە کارگەکان دیزاین بۆ قووتویەکی بێ سەر پۆشی بنکە چوارگۆشە دادەنێت، بە بەکارهێنانی پارچە کارتۆنێك درێژی لایەکی 24 cm بووبە برینی 4 چوارگۆشە لە گۆشەکانیەوە کە x درێژی هەر لایەکیانە، پاشان نوشتاندنەوەی لایەکانی، ئەندازیارەکە پێویستە چ بەهایەك بۆ x هەڵبژێرێت بۆ ئەوەی قووتوەکە گەورەترین قەبارەی هەبێت.





بە گەڕانەوە بۆ نموونە 1 پێش دەست بەشیکارکردن پێویستە ئەوە بزانیت زۆر قووتو هەیە ڕووبەرەکەی بکاتە $675cm^2$، دەستبکە بە پرسیارکردن لەشێوەی قووتوەکە کە گەورەترین قەبارەی هەیە؟ ئایا بەرزە یان نزمە یان لەخشتەك نزیکە.

لەوانەیە چاکتربێت لەسەرەتاوە قەبارەی ژمارەیەك لە قووتو هەژماربکەیت، هەروەك لەوێنەکان دەردەکەون بۆ ئەوەی بیرۆکەیەکی نزیکت لەشیکارەکە لا دروست بێت. ئەوە بزانە کە ناتوانیت دەست بەشیکاری پرسیارەکە بکەیت ئەگەر نەزانیت داواکراوەکە چییە؟











ئەمانەی خوارەوە ئەوهەنگاوە گشتیانەیە کەپێویستە پێی هەڵستیت بۆ شیکارکردنی ئەم جۆرە پرسیارانە.

بۆ شیکارکردنی پرسیارێك لە پرسیارەکانی بەها کۆتاییەکان

1. هەموو ئەو بەهایانەی کەدراوە و ئەو بەهایانەی داواکراوە دیاریبکە وێنەکە بکێشە ئەگەر توانیت.،

2. هاوکێشەی سەرەکی بۆ ئەو بڕەی کە پێویستە هەژماری بەهای کۆتایی بکەیت بنووسە.

3. هاوکێشەی یەکەم بنووسەوە بەمەرجێك هاوکێشە نوێیەکە تەنها یەك گۆڕاوی ئازاد لەخۆ بگرێت، لەوانەیە پێویستیت بە هاوکێشە لاوەکییەکان هەبێت کە گۆڕاوە ئازادەکانی هاوکێشەی سەرەکی بەیەکەوە دەبەستێتەوە

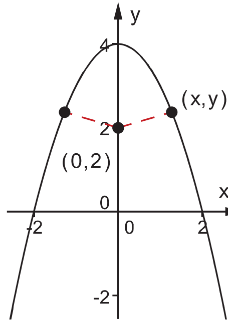
4. ماوەی بەسوود بۆ هاوکێشەی سەرەکی دیاریبکە، واتا بەهای ئەو گۆڕاوانەی وا دەکات پرسیارەکە مانای هەبێت دیاریبکە.

5. بەهای گەورەترین یان بەهای بچووکترین داواکراو بە بەکارهێنانی تەکنیکەکانی هەژمارکردنی جیاکاری کە لە وانەکانی پێشتر فێربوویت دیاریبکە.

نموونـــه 2 دۆزینەوەی کورتترین دووری

ئەو خاڵانەی سەر بڕگەی هاوتای $f(x) = 4 - x^2$ بدۆزەوە کە نزیکترین خاڵن لە $(0, 2)$.

شیکار



وێنەی بەرامبەر ئەوە نیشاندەدات کە دوو خاڵ لەسەر بڕگە هاوتایەکە هەیە کە کەمترین دووریان لەخاڵی $(0,2)$ هەبێت

دەستبکە بە دۆزینەوەی دووری نێوان خاڵی $(0,2)$ و خاڵی $(x, f(x))$

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + (4 - x^2 - 2)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

لەبەرئەوەی d کەمترین بەها وەردەگرێت کاتێك بڕەکەی ناو ڕەگەکە کەمترین بەهای هەبێت، بەها شلۆقەکانی نەخشەکە بدۆزەوە

$g(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ داتاشراوی نەخشەی g بدۆزەوە، پاشان هاوکێشەی $g'(x) = 0$ شیکاربکە.

$$g'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3)$$

$$2x(2x^2 - 3) = 0$$

$$x = -\sqrt{\tfrac{3}{2}}\text{،}\ \ x = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\ \text{،}\ x = 0$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	

خشتەکە ئەوە ڕوووندەکاتەوە کە هەر دوو خاڵی شلۆقی $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ و $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ هەریەکەیان بەهای بچووکترین بۆ نەخشەکە دیاریدەکەن، بۆ دیاریکردنی ئەو خاڵانەی کە دەبنە شیکار بۆ پرسیارەکە، دووری نێوان خاڵی $(0,2)$ و هەریەك لە خاڵەکانی $(0, f(0))$ و $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$ و $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$ بدۆزەوە، دەبینیت کە هەردوو خاڵی $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$ و $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$ بریتین لە شیکارەکە، و دووری نێوان هەریەکەیان و خاڵی $(0,2)$ یەکسانە بە 1.45 بەنزیکەیی.

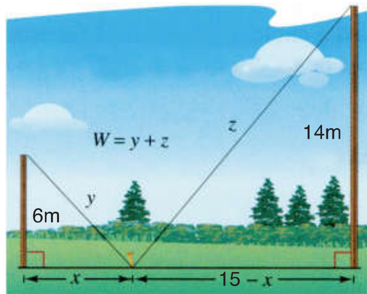


2. ئەو خاڵانەی سەر بڕگەی هاوتای $f(x) = x^2 - 2$ بدۆزەوە کە نزیکترین خاڵن لە $(0, -1)$؟

نموونــــە 3

دۆزینەوەی کورترین درێژی

دوو ستوون بەرزییەکانیان $14\ m$ و $6\ m$ دووری نێوانیان $15\ m$، لە ئەندازیارێك داواکرا هەریەك لە دوو ستوونەکە بەهۆی تەلێك ببەستێتەوە بە خاڵێك کە دەکەوێتە نێوانیانەوە هەروەك لەم وێنەیە دەردەکەوێت، لەکام خاڵی نێوان دوو ستوونەکە پێویستە دووسەری تەلەکە بەیەکتر ببەستێتەوە بۆ ئەوەی سەرجەمی دووجای درێژی هەردووکیان کەمترین بێت؟



شیکار درێژی تەلەکە بە W و دووری نێوان خاڵی بەستنەوە و ستوونە کورتەکە بە x دابنێ،
ئەگەر سەیری وێنەکە بکەیت، دەبینیت کە $W = y + z$ ، لەم پرسیارەدا لە جیاتی ئەوەی یەك لە
گۆڕاوەکان y یان z بەپێی ئەویتریان دەربرێت، لەوانەیە گونجاو بێت هەردووکیان بەپێی x
هەژماربکەین. $x^2 + 6^2 = y^2$ و $(15 - x)^2 + 14^2 = z^2$ $y = \sqrt{x^2 + 36}$ $z = \sqrt{x^2 - 30x + 421}$
هەروەها $W = y + z = \sqrt{x^2 + 36} + \sqrt{x^2 - 30x + 421}$ لەم پرسیارەدا ماوەی بەسوود بریتییە لە
$0 \le x \le 15$.

داتاشراوی $W(x)$ بدۆزەوە: $$W'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+36}} + \frac{x-15}{\sqrt{x^2-30x+421}}$$

هاوکێشەی $W'(x) = 0$ شیکاربکە.

$$W'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+36}} + \frac{x-15}{\sqrt{x^2-30x+421}} = 0$$

$$x\sqrt{x^2 - 30x + 421} = (15 - x)\sqrt{x^2 + 36}$$

$$x^2\left(x^2 - 30x + 421\right) = (15 - x)^2\left(x^2 + 36\right)$$

$$x^4 - 30x^3 + 421x^2 = x^4 - 30x^3 + 261x^2 - 1080x + 8100$$

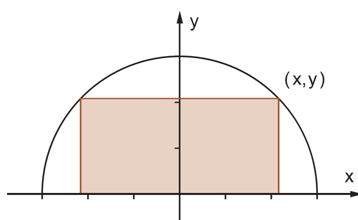
$$160x^2 + 1080x - 8100 = 0$$

$$x = -11.25 \quad x = 4.5$$

شیکاری پەسەند بریتییە لە $x = 4.5$ پێویستە خاڵی بەستنەوە لە دووری 4.5 m لە ستوونە
کورتەکە جێگیر بکرێت.

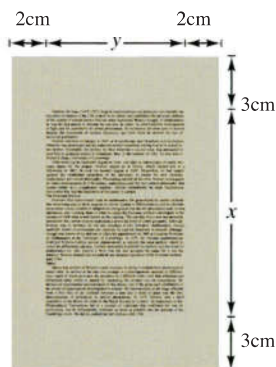


3. درێژی و پانی گەورەترین لاکێشە بدۆزەوە
کە دەتوانیت لەناو نیوە بازنەیەکدا بکێشیت
نیوەتیرەکەی r بێت.



نموونـــە 4 دۆزینەوەی کەمترین ڕووبەر

دیزاینەرێکی چاپکردن کار لەسەر دیزاینی لاپەڕەیەکی لاکێشەیی دەکات، ئەو ڕووبەرەی کە
تایبەتکراوە بۆ چاپکردنەکە بریتییە لە $155\,\text{cm}^2$ و پانی پەراوێزەکانی سەرەوە و خوارەوەی 3 cm
و پەراوێزەکانی لای ڕاست ولای چەپی 2cm، پێویستە چەند لە درێژی و پانی لاپەڕەکە
هەڵبژێرێت بۆ ئەوەی بەکاربردنی کاغەزەکە کەمترین بێت؟



شیکار

درێژی ناوچەی تایبەتکراو بە چاپکردنەکە بە x وپانییەکەی بە
y و ڕووبەری لاپەڕەکە بە A هێمابکە. $A = (x + 6)(y + 4)$ ، x و
y بە پەیوەندی $xy = 155$ بەیەکەوە دەبەسترێنەوە. ئەمەش
ڕێدەدات بە نووسینی A وەك نەخشەیەك بەپێی x

$$A(x) = (x + 6)\left(\frac{155}{x} + 4\right) = 179 + 4x + \frac{930}{x}$$

لەم پرسیارەدا ماوە بەسوودەکە بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە
ڕاستییە موجەبەکان داتاشراوی نەخشەی $A(x)$ بریتییە لە

$$A'(x) = 4 - \frac{930}{x^2}$$

و بەهایە شلۆقەکانی بریتیین لە ڕەگەکانی هاوکێشەی $A'(x) = 4 - \frac{930}{x^2} = 0$ ئەم هاوکێشە دوو ڕەگی هەیە کە بریتیین لە ± 15.25 بەنزیکەیی ڕەگە سالبەکە هیچ مانایەکی نییە. کەواتە درێژی لاپەڕەکە و پانییەکەی بەنزیکەیی بریتیین لە 21.25 و $\left(\frac{155}{15.25}+4\right) \approx 14.16$ cm یەك لەدوای یەك.



4. یەکێك کار لەسەر دیزاینی لاپەڕەیەکی لاکێشەیی دەکات ئەو ڕووبەرەی کە تایبەتکراوە بۆ چاپکردنەکە بریتییە لە 200cm^2 وپانی هەریەکە لەچوار پەراوێزەکەی 3 cm دەبێت. پێویستە چەند لە درێژی و پانی لاپەڕەکە هەڵبژێرێت بۆ ئەوەی بەکاربردنی کاغەزەکە کەمترین بێت.

5-4 ڕاهێنان

1 ئەو دوو ژمارەیە بدۆزەوە کە سەرجەمیان دەکاتە S کاتێك ئەنجامی لێکدانیان گەورەترین بێت.

2 ئەو دوو ژمارەیە بدۆزەوە کە ئەنجامی لێکدانیان دەکاتە 192 کاتێك سەرجەمی یەکەمیان و 3 ئەوەندەی دووەمیان کەمترین ئەنجامی هەبێت.

3 ئەو دوو ژمارەیە بدۆزەوە کەسەرجەمی یەکەمیان و دوو ئەوەندەی دووەمیان بکاتە 100 وئەنجامی لێکدانیان گەورەترین بێت.

4 لاکێشەیەك چێوەکەی 100 m درێژی و پانییەکەی بدۆزەوە بۆ ئەوەی ڕووبەرەکەی گەورەترین بێت.

لە پرسیاری 5 و 6 دا خاڵێکی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بدۆزەوە کەنزیکترین خاڵ بێت لەخاڵە دراوەکە.

5 $f(x)=\sqrt{x}$ ؛ $(4,0)$

6 $f(x)=(x+1)^2$ ؛ $(-1,3)$

7 **هاتوچۆ** نەخشەی $F(v)=\frac{v}{22+0.02v^2}$ نموونەیەکە بۆ لێکۆڵینەوەی تێکڕای جووڵانەوەی هاتوچۆ (ژمارەی ئۆتۆمبێلەکان لە چرکەیەکدا) لەسەر ڕێگایەکی قەڵەباڵغ، کاتێك v هێمایە بۆ خێرایی ڕۆیشتن لەسەر ئەم ڕێگایە، کام خێرایی وادەکات ئەم تێکڕایە گەورەترین بێت.

8 جووتیارێك پلان دادەنێت بۆ پەرژینکردنی ڕووبەری زەویەکی لاکێشەیی لەسەر کەناری ڕووبارێك، لەپێناو دابینکردنی کێڵگەیەکی گژوگیا کە ڕانەمەڕێك تێیدا دەلەوەڕێت، درێژی و پانی پێویستی زەویەکە دەبێت چەندبێت بۆ ئەوەی درێژی پەرژینەکە کەمترین بێت ئەگەر بزانیت ڕووبەری ئەو زەویەی پەرژین کراوە پێویستە بکاتە $180\,000\,\text{m}^2$ و جووتیارەکە، ئەولایەی زەوییەکە کە دەکەوێتە سەر ڕووبارەکە پەرژین ناکات؟



9 **گەورەترین ڕووبەر** پەنجەرەی نورماندی پێکدێت لە پەنجەرەیەکی شێوە لاکێشەیی لە بەشی سەرەوەی پەنجەرەیەکی نیوە بازنەیی هەیە، هەروەك لەوێنەی بەرامبەر دەردەکەوێت، دوورییەکان گەورەترین پەنجەرەیەکی نۆماردی بدۆزەوە کە چێوەی لاکێشەکەی 6m بێت.

10 تیرەی ئەو بازنەیەی کە دەوری سێگۆشەیەکی دوو لایەکسانی داوە دەکاتە 8 cm گەورەترین ڕووبەری سێگۆشەکە بدۆزەوە.

11 هەردوو نەخشەی $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ و $g(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ لەماوەی $[0, 4]$ بەکاربهێنە.

أ ڕوونکردنەوەی هەردوو نەخشەکە لەهەمان ڕووتەختی پۆوتاندا لەماوەی $[0, 4]$ بکێشە.

ب برێك بەپێی x بنووسە کەدووری ستوونی d لەنێوان ڕوونکردنەوەی دوونەخشەکە لە x دەرببرێت، جیاکاری بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی بەهای x کەوادەکات ئەو دووریە گەورەترین بێت.

ج هاوکێشەی لێکەوتەکانی هەردوو ڕوونکردنەوەکە بدۆزەوە کاتێك x دەکاتە ئەو بەهایەی کە لەلقی ب دۆزیتەوە، وێنەی دوو لێکەوتەکە بکێشە. چ پەیوەندییەك لە نێوانیاندا هەیە؟

12 عەمبارێکی بچووك شێوەی لوولەکی وەردەگرێت کە دوو بنکەکەی بەنیوەگۆ کۆتایی دێت، قەبارەی گشتی ئەو عەمبارە دەکاتە $12\ m^3$ نیوەتیرەی لوولەکە کە بدۆزەوە، کە کەمترین ڕووبەری ڕووی عەمبارەکە دابیندەکات.

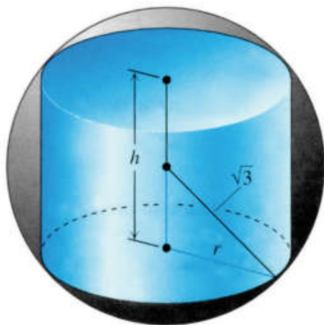
13 عەمبارێکی دەستکرد هاوشێوەی عەمبارەکەی پرسیاری پێشوو قەبارەکەی $3m^3$ تێچوونی دوو نیوەگۆیەکە دوو ئەوەندەی تێچوونی لوولەکەکە یە بەمەتر دووجا. نیوە تیرەی بنکەی لوولەکە بدۆزەوە کەوا دەکات کەمترین تێچوونی هەبێت.

14 قەبارەی گەورەترین قووچەکی بازنەی وەستاو بدۆزەوە دەتوانرێت لەناو گۆیەکدا دابنرێت نیوە تیرەکەی r بێت.

دەربارەی چەمکەکان

15 لاکێشەیەك چێوەکەی 20 m درێژی وپانییەکەی بدۆزەوە بۆ ئەوەی ڕووبەرەکەی گەورەترین بێت ئایا بەهایەك بۆ درێژی وپانی لاکێشەکە هەیە، کەوادەکات ڕووبەرەکەی کەمترین بێت؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

16 داواکرا لوولەکێك لەناو گۆیەك دابنرێت نیوەتیرەکەی $\sqrt{3}$ یەکەی درێژی بێت هەروەك لە وێنەی بەرامبەر دەردەکەوێت. بەرزی لوولەکەکەو نیوەتیرەکەی بدۆزەوە بۆ ئەوەی قەبارەکەی گەورەترین بێت.



بەشی 4

پێداچوونەوەی بەش

1 پێناسەی خاڵی شلۆقی نەخشە بکە، چەماوەی نەخشەیەك بكێشە كە جۆرە جیاوازەكانی بەها شلۆقەكان نیشانبدات.

2 نەخشەی **تاك** بریتییە لە نەخشەی f کە پاسادانی $f(-x)=-f(x)$ دەكات بەهای x هەرچەندبێت.
وادابنێ f نەخشەیەكی تاكی بەردەوامە وتوانای داتاشراوی هەیە، خشتەیی خوارەوە چەند بەهایەكمان پێدەدات.

x	-5	-4	-1	0	2	3	6
y	1	3	2	0	-1	-4	0

أ $f(4)$ بدۆزەوە.

ب $f(-3)$ بدۆزەوە.

ج بە ڕوونكردنەوەیی پێدراوەكانی خشتەكە بنوێنە و وێنەی ڕوونكردنەوەی نەخشەی f لەماوەی $[-6, 6]$ بكێشە. كەمترین ژمارە بۆ بەها شلۆقەكانی سەر نەخشەكە لەو ماوەیەدا چەندە؟ ئەمە ڕوونبكەوە.

د ئایا دەكرێت $\lim_{x\to 0} f(x)$ ئامانجی نەبێت؟ ئەمە ڕوونبكەوە.

لە دوو پرسیاری 3 و 4 دا (ئەگەر هەبێت) خاڵە شلۆقەكان و ماوەكانی ڕوو لەزیادبوون و ماوەكانی ڕوو لەكەمبوونی نەخشەكە بدۆزەوە.

3 $f(x)=(x-1)^2(x-3)$

4 $f(x)=\sin x+\cos x$ لەماوەی $[0,2\pi]$

لە دوو پرسیاری 5 و 6 دا خاڵەكانی وەرگەڕان بدۆزەوە، لە قۆپاو و قۆقزی ڕوونكردنەوەی نەخشەكە بكۆڵەوە.

5 $f(x)=x+\cos x$ لەماوەی $[0,2\pi]$

6 $f(x)=(x+2)^2(x-4)$

لە دوو پرسیاری 7 و 8 تاقیكردنەوەی داتاشراوەی دووەم بۆ دۆزینەوەی هەموو بەهایەكانی كۆتایی بەكاربهێنە.

7 $f(x)=2x^2(1-x^2)$

8 $f(x)=x-4\sqrt{x+1}$

لە پرسیاری 9 تا 16 ئامانجە داواکراوەکە بدۆزەوە ئەگەر هەبێت.

9 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{3x^2+5}$

10 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{3x^2+5}$

11 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x+5}$

12 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{-2x}$

13 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5\cos x}{x}$

14 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}}$

15 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6x}{x+\cos x}$

16 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{2\sin x}$

لە پرسیاری 17 تا 20 هەموو دەرکەنارە ئاسۆییەکان و ستوونییەکان بۆ نەخشەکە بدۆزەوە.

17 $f(x)=\frac{2x+3}{x-4}$

18 $f(x)=\frac{5x^2}{x^2+2}$

19 $f(x)=\frac{3}{x}-2$

20 $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+2}}$

لە ڕپرسیاری 21 تا 28 ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

21 $f(x)=4x^3-x^4$

22 $f(x)=x\sqrt{16-x^2}$

23 $f(x)=(x-3)^2(x-1)^3$

24 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

25 $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

26 $f(x)=\frac{x^2}{x^4+1}$

27 $f(x)=x^2+x+\frac{4}{x}$

28 $f(x)=|x-1|+|x-3|$

29 **دوورییەکان** پاپۆڕی A لەلای ڕۆژهەڵات 100 km لە پاپۆڕی B دووربوو لەوکاتەی، پاپۆڕی A بەئاڕاستەی ڕۆژئاوا بەخێراییەك تێکڕایەکەی 12 km/h دەجوڵێت و پاپۆڕی B بەخێرایی 10 km/h بەرەو باشوور دەجوڵێت. لە چ کاتێك دووری نێوان دوو پاپۆڕەکە کەمترین دەبێت؟ ئەو دوورییە چەندە؟

30 لە سێگۆشەیەکی گۆشە وەستاودا دوو لا وەستاوەکەی لەسەر تەوەری پۆوتانەکان جووتن و ژێیەکەی بەخاڵی $(1, 8)$ دادەڕوات، سەرەکانی ئەو سێگۆشەیە بدۆزەوە بۆ ئەوەی ڕووبەرەکەی کەمترین بێت.

بەشی

4

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە

1 کام لەو نەخشانەی خوارەوە تەنها دوو بەهای کۆتاییان هەیە؟

أ $f(x)=|x-2|$　　ب $f(x)=x^3-6x+5$　　ج $f(x)=x^3+6x-5$

د $f(x)=\tan x$　　هـ $f(x)=x+\ln x$

2 لەکام ماوە نەخشەی $f(x)=e^{x^3-6x^2+8}$ ڕوو لەکەمبوونە؟

أ $]-\infty,-2]$　　ب $]2,4[$　　ج $[2,4]$　　د $]4,+\infty[$　　هـ نییە.

3 ئەگەر $a<0$ چەماوەی نەخشەی $f(x)=ax^3+3x^2+4x+5$ قۆپاو دەبێت لەماوەی.

أ $]-\infty,-\frac{1}{a}[$　　ب $]-\infty,\frac{1}{a}[$　　ج $]-\frac{1}{a},+\infty[$　　د $]\frac{1}{a},+\infty[$　　هـ $]-\infty,-1[$

4 پۆیەکانی x بۆ خاڵەکانی وەرگەڕانی نەخشەی $f(x)=x^5-5x^4+3x+7$.

أ تەنها 0　　ب تەنها 1　　ج تەنها 3　　د 0 و 3　　هـ 0 و 1

5 کام لەمانە ڕێگات پێدەدات، بڕیاربدەیت کەڕوونکردنەوەی نەخشەی f خاڵی وەرگەڕانی هەبێت لە $x=c$.

أ f' گەورەترین خۆجێی هەیە لە $x=c$.　　ب $f''(c)=0$　　ج $f''(c)$ نەبێت.

د نیشانەی f'' لە $x=c$ دەگۆڕێت.　　هـ f نەخشەیەکی سێجاییە و $c=0$

6 سەرجەمی دوو ژمارەی مووجەب دەکاتە 60. ئەو بەهایەی ئەنجامی لێکدانی یەکێکیان لە دووجای ئەوی تریان دەکاتە گەورەترین بدۆزەوە.

أ 3481　　ب 3600　　ج 27 000　　د 32 000　　هـ 36 000

7 سێگۆشەیەکی گۆشە وەستاو درێژی ژێیەکەی دەکاتە 10 بەهای گەورەترین ڕووبەر کامەیە.

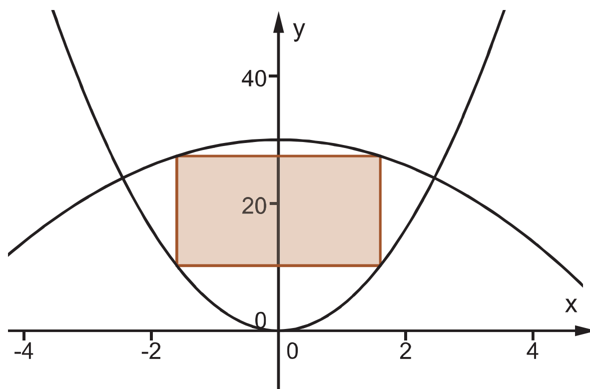
أ 24　　ب 25　　ج $25\sqrt{2}$　　د 48　　هـ 50

8 گەورەترین ڕووبەر بۆ ئەو لاکێشە سوورەی کە دەوردراوە بە بڕگەهاوتای $y=4x^2$ و بڕگەهاوتای $y=30-x^2$ بریتییە لە.

أ $20\sqrt{2}$　　ب 40

ج $30\sqrt{2}$　　د 50

هـ $40\sqrt{2}$



9 قەبارەی خشتەکێك بەتێکڕای $24cm^3/min$ زیاددەکات، لەکاتێکدا درێژی لایەکی بەتێکڕای $2cm/min$ زیاددەکات درێژی لایەکی خشتەکەکە کامەیە؟

أ $2cm$ ب $2\sqrt{2}\,cm$ ج $\sqrt[3]{12}cm$ د $4cm$ هـ $8cm$

10 قەبارەی خشتەکێك بەتێکڕای $24cm^3/min$ زیاددەکات، لەکاتێکدا ڕووبەری ڕووەکەی بەتێکڕای $12cm^2/min$ زیاددەکات درێژی لایەکی خشتەکەکە کامەیە؟

أ $2cm$ ب $2\sqrt{2}\,cm$ ج $\sqrt[3]{12}cm$ د $4cm$ هـ $8cm$

11 خاڵێك لەسەر بازنەیەك دەجووڵێت، کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە، ئەگەر خێراییە ئاسۆییەکەی لەخاڵی $(0.6, 0.8)$ بکاتە $\frac{dx}{dt}=3$ ئەوا خێراییە ستوونیەکەی $\frac{dy}{dt}$ لەو خاڵەدا کامەیە؟

أ -3.875 ب -3.75 ج -2.25 د 3.75 هـ 3.875

بەشی

5

تەواوکاری Integration

بەشی پێنجەم

وانەکان

هونەری دروستکردنی سیرامیك لە زۆربەی وڵاتان پێشکەوتووە هەتا ئێستاش هەر بەردەوامە، ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y = 5.0 + 2\sin\frac{x}{4}$ کاتێك $0 \le x \le 8\pi$ شێوەی تەنیشتەکانی دەفرێکی سیرامیك دەنوێنێت، کاتێك x هێمایە بۆ بەرزی بە «گرێ» و y هێمایە بۆ نیوەتیرە لە بەرزی x. بنکەی دەفرەکە دروستکراوە و لەسەر مێزە خولاوەکە دانرا. بڕی ئەو قوڕە شێلراوەی پێویستە بۆ بنکەکەی زیادبکرێت چەندە بۆ دروستکردنی ئەو دەفرە، ئەگەر زانیت نیوەتیرەی ناوەوەی دەفرەکە هەردەم یەك «گرێ» کەمترە لە نیوەتیرەی دەرەوەی؟

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

1 هەر دەستەواژەیەك لەستوونی لای ڕاست بە ڕاڤەکراوەکەی (لێکدانەوەکەی) لە ستوونی لای چەپ ببەستەوە.

1. داتاشراوی نەخشەی f کاتێك $x=a$.
2. تێکڕای گۆڕانی ناوەندی.
3. تێکڕای گۆڕانی ساتی.
4. نەخشەی بەردەوام.
5. ئامانج.

أ. ئامانجی $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ کاتێك Δx لە سفر نزیك دەبێتەوە.

ب. نزیکبوونەوەی بڕێکە بەگۆڕاوی x کاتێك x لە بەهایەکی دیاریکراو یان لە $+\infty$ نزیکدەبێتەوە.

ج. نزیکبوونەوەی بڕی $\frac{f(a+h)-f(x)}{h}$ ـە کاتێك h لە 0 نزیکدەبێتەوە.

د. ئەنجامی دابەشکردنی بڕی گۆڕانی y لەسەر بڕی گۆڕانی x.

هـ. گەورەترین بەها نەخشەکە لەماوەکەدا وەریدەگرێت.

و. نەخشەیەکە دەتوانرێت ڕوونکردنەوەکەی بکێشرێت بێ ئەوەی پێنووسەکەت هەڵبگیرێت.

سەرجەمە بەناوبانگەکان

2 سەرجەمی $s_n=1+2+...+n$ بەپێی n بدۆزەوە، کاتێك n ژمارەیەکی تەواوی موجەب بێت.

3 بە بەکارهێنانی دەرئەنجامی بیرکاری بیسەلمێنە $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ کاتێك n ژمارەیەکی تەواوی موجەب بێت.

داتاشراو

4 دوو نەخشەی جیاواز $u(x)$ ، $v(x)$ بدۆزەوە کە پاسادانی $u'(x)=v'(x)=a$ دەکەن کاتێك a ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

5 ڕوونیبکەوە دوو نەخشەی $f(x)=e^{2x}$ و $g(x)=e^{2x}+C$ هەمان داتاشراویان هەیە، کاتێك C ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

6 ئەگەر $f(x)$ داتاشراوی $u(x)$ بێت، داتاشراوی نەخشەی $v(x)=u(x)+C$ چییە، کاتێك C ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

ڕێسایەکانی داتاشراو

لە ڕاهێنانی 7 تا 12 داتاشراوی ئەم نەخشانە بدۆزەوە.

7 $f(x)=e^x+\sin x$

8 $f(x)=1+\tan x$

9 $f(x)=2\ln x-\frac{1}{x}$

10 $f(x)=e^x\ln(x+1)$

11 $f(x)=e^{\sin x}$

12 $f(x)=\frac{\ln x}{x^2+1}$

ئامانجەکان

بە سادەترین شێوە بدۆزەوە.

13 $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$

14 $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2+3}{5x^2+7}$

15 $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}$

1-5

تەواوکاری بێسنوور
Indefinite Integral

دۆزینەوە

دۆزینەوەی نەخشە بنەڕەتییەکان: نەخشەی $F(x)$ کە ئەم داتاشراوەی لێ پەیدابووە بدۆزەوە.

1. $F'(x)=2x$
2. $F'(x)=x$
3. $F'(x)=x^2$
4. $F'(x)=\frac{1}{x^2}$
5. $F'(x)=\cos x$

چۆن ئەو نەخشانەت دۆزیەوە؟

ئامانجەکان

- نووسینی تەواوکاری بێسنوور بۆ دەربڕینی نەخشەی بنەڕەت بەکاردەهێنێت.
- نەخشە بنەڕەتییەکان بە بەکارهێنانی ڕێسایەکانی تەواوکاری دەدۆزێتەوە.
- نەخشەی بنەڕەت بۆ نەخشەیەکی دیاریکراو دەدۆزێتەوە کە بەخاڵێکی دیاریکراودا دەڕوات.

زاراوەکان
Vocabulary

نەخشەی بنەڕەت
Antiderivative
تەواوکاری بێسنوور
Indefinite Integral
نەگۆڕی تەواوکاری
Constant of integration

نەخشەی بنەڕەت (بەرامبەی داتاشراو)

لە وانەکانی پێشوو فێربوویت چۆن داتاشراوی نەخشەیەکی زانراو بدۆزیتەوە. بەڵام ڕۆژێك پرسیوتە ئایا دەتوانیت نەخشەیەك بدۆزییەوە کاتێك داتاشراوەکەی زانراوبێت؟ وەڵامی ئەم پرسیارە: بەڵێ. لەم وانەیەدا فێردەبیت ئەگەر f نەخشەیەکی بەردەوام بێت دەتوانیت نەخشەی F بدۆزییەوە کە توانای داتاشراوی هەبێت، کاتێك f داتاشراوەکەی بێت، بە نەخشەی F دەوترێت نەخشەی بنەڕەتی نەخشەی f. لەمەودوا هەندێك ڕێسا فێردەبیت، کە یارمەتیت دەدات بۆ دۆزینەوەی هەموو نەخشە بنەڕەتییەکانی نەخشەیەکی دیاریکراو.

نەخشەی بنەڕەت

بە نەخشەی F کە توانای داتاشراوی هەیە دەوترێت نەخشەی بنەڕەتی نەخشەی f کاتێك داتاشراوی F بکاتە f.

ئایا نەخشەیەکی دیاریکراو، زیاتر لە نەخشەیەکی بنەڕەتی هەیە؟ وەڵام بۆ ئەم پرسیارە زۆرئاسانە. هەموو نەخشە نەگۆڕەکان، نەخشەی بنەڕەتین بۆ نەخشەی $f(x)=0$.

سەلمێنراوی 1-5 — **نەخشەی بنەڕەت**

ئەگەر $F(x)$ نەخشەی بنەڕەتی $f(x)$ بێت، ئەوا نەخشەی $G(x)=F(x)+C$ کاتێك C، ژمارەیەکی ڕاستی بێت، نەخشەی بنەڕەتییە بۆ نەخشەی $f(x)$.

تەنها دۆزینەوەی داتاشراوی $G(x)=F(x)+C$ بەسە بۆ سەلماندنی ئەو سەلمێنراوە، ئەوانەی لەبواری بیرکاری کاردەکەن هێمای $\int f(x)dx$ بەکاردەهێنن بۆ هەر نەخشەیەکی بنەڕەتی $f(x)$ و بەو هێما دەوترێت تەواوکاری بێسنووری نەخشەی $f(x)$.

نموونـــه 1 دۆزینەوەی نەخشەی بنەڕەت

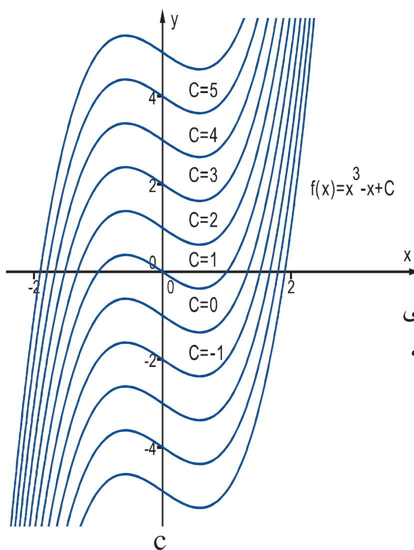
$\int x^2dx$ بدۆزەوە.

شیکار

ئەگەر ڕێسای داتاشراوی نەخشە توانییەکانی $f(x)=ax^n$ بەبیری خۆت بهێنیتەوە، بۆت دەردەکەوێت نەخشەی $f(x)=x^2$ داتاشراوی نەخشەیەکە بەشێوەی $F(x)=ax^3$. بەڵام داتاشراوی ئەوەی دوایی دەکاتە $F(x)=3ax^2$. ئەگەر $F'(x)=f(x)$ ئەوا $a=\frac{1}{3}$، $F(x)=\frac{1}{3}x^3$. نەخشەی بنەڕەتی نەخشەی $f(x)=x^2$. دەتوانیت بەشێوەی $\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$ بنووسیت تێبینی ژمارەی C بکە. ئامانج لەبوونی ژمارەی نەگۆڕ تا بزانیت دوو نەخشەی بنەڕەت بۆ هەمان نەخشە جیاوازن لەیەکتری بەژمارەیەکی ڕاستی.



1. $\int x^3dx$ بدۆزەوە.



پەیوەندی $G(x)=F(x)+C$ نێوان دوو نەخشەی بنەڕەتی بۆ هەمان نەخشە، ئەوە دەگەینێت ڕوونکردنەوەی هەموو نەخشە بنەڕەتییەکانی نەخشەیەکی دیاریکراو لە ئەنجامی ڕاکێشانی ئەستوونی ڕوونکردنەوەی یەکێکیان پەیدادەبێت وەك لە وێنەی بەرامبەردا دەردەکەوێت، بە ڕەچاوکردنی ئەم تێبینیە هەموو نەخشە بنەڕەتییەکانی نەخشەیەکی دیاریکراو یەك نەخشەی بنەڕەتییان هەیە ڕوونکردنەوەکەی بەخاڵێکی دیاریکراوی ڕووتەختی پۆتانەکاندا دەڕوات. نەگۆڕی c خاڵی یەکتربڕینی ستوونی نەخشە بنەڕەتییەکە دەنوێنێ

نموونـــه 2 دۆزینەوەی نەخشەیەکی بنەڕەتی دیاریکراو

نەخشەی بنەڕەتی بۆ نەخشەی $f(x)=x^2$ بدۆزەوە کە چەماوەکەی بەخاڵی(3,3) دا دەڕوات.

شیکار

$G(x)=\frac{1}{3}x^3+C$ نەخشەی بنەڕەتی $f(x)=x^2$. بۆ ئەوەی ڕوونکردنەوەی نەخشە بنەڕەتییەکە بە خاڵی $(3,3)$ بڕوات، دەبێت C پاسەدانی هاوکێشەی $3=\frac{1}{3}3^3+C$ بکات واتە دەبێت بکاتە -6.
لەمەوە دەردەچێت نەخشەی بنەڕەتی بۆ نەخشەی $f(x)=x^2$ کە ڕوونکردنەوەکەی بەخاڵی $(3,3)$ دەڕوات بریتییە لە $G(x)=\frac{1}{3}x^3-6$.



2. نەخشەی بنەڕەتی بۆ نەخشەی $f(x)=x^4$ بدۆزەوە کە ڕوونکردنەوەکەی بەخاڵی $(2,4)$ دەڕوات.

لەم وانەیەدا فێردەبێت چۆن تەواوکاری بێسنوور بۆ نەخشەیەکی دیاریکراو بدۆزییەوە. لەبەرئەوەی داتاشراو بریتییە لە گواستنەوەی نەخشەیەك بۆ داتاشراوەکەی، ئەوا دۆزینەوەی تەواوکاری بێسنوور بۆ نەخشەیەکی دیاریکراو بریتییە لە کرداری **پێچەوانەی داتاشراو Antiderivative** لەو تێبینیەوە دەردەچێت لە ڕێسایەکانی داتاشراو، ڕێسایەکانی تەواوکاری بێسنوور بەرهەم دەهێنرێن.

ڕێسایەکانی تەواوکاری بێ سنوور

ڕێسایەکانی داتاشراو	ڕێسایەکانی تەواوکاری
$(C)' = 0$	$\int 0 dx = C$
$(kx)' = k$	$\int k dx = kx + C$
$(kf(x))' = kf'(x)$	$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$	$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad n \neq -1$
$(e^x)' = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$
$(\sin x)' = \cos$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin dx = -\cos x + C$

نموونــــه 3 جێبەجێکردنی ڕێسایەکانی تەواوکاری

$\int (2\cos x - 5x)dx$ بدۆزەوە.

شیکار

$$\int (2\cos x - 5x)dx = \int 2\cos x dx - \int 5x dx = 2\int \cos x dx - 5\int x dx = 2\sin x - \frac{5}{2}x^2 + C$$



.3 $\int (2\sin x + 3x^2)dx$ بدۆزەوە.

بۆ ئاسانکردنی جێبەجێکردنی ڕێسایەکانی تەواوکاری، پێویستە لە هەندێك باردا نەخشەکە دووبارە بنووسرێتەوە «ڕێکبخەیت»، بەشێوەیەك بە ڕێسایەکانی تەواوکاری بچن، بۆ ئەوەی بە ئاسانی بتوانیت ڕێساکانی لەسەر جێبەجێبکەیت.

نموونــــه 4 هەنگاوەکانی دۆزینەوەی تەواوکاری بێ سنوور

ئەم خشتە تەواوبکە.

تەواوکاری	ڕێکخستنی نەخشەکە	تەواوکاری بکە	سادەبکە
أ $\int \frac{1}{x^3} dx$			
ب $\int \sqrt{x} dx$			
ج $\int 2\sin x dx$			

شیکار

سادەبکە	تەواوکاری بکە	ڕێکخستنی نەخشەکە	تەواوکاری
$-\frac{1}{2x^2}+C$	$\frac{-1}{2}x^{-2}+C$	$\int x^{-3}dx$	أ $\int \frac{1}{x^3}dx$
$\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$	$\int x^{\frac{1}{2}}dx$	ب $\int \sqrt{x}\,dx$
$-2\cos x+C$	$2(-\cos x)+C$	$2\int \sin x dx$	ج $\int 2\sin x dx$

خاڵی چاودێری 4 : $\int x\sqrt{x}\,dx$ بدۆزەوە.

1-5 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تاکو 3، لە ڕاستی ئەنجامەکان بکۆڵەوە. بە وەرگرتنی داتاشراوی نەخشە بنەڕەتییەکە.

1 $\int\left(-\frac{9}{x^4}\right)dx=\frac{3}{x^3}+C$

2 $\int\left(4x^3-\frac{1}{x^2}\right)dx=x^4+\frac{1}{x}+C$

3 $\int\frac{x^2-1}{x\sqrt{x}}dx=\frac{2(x^2+3)}{3\sqrt{x}}+C$

خشتەکە تەواوبکە.

	تەواوکاری	ڕێکخستنی نەخشەکە	تەواوکاری بکە	سادەبکە
4	$\int\sqrt[3]{x}dx$			
5	$\int\frac{1}{x\sqrt{x}}dx$			
6	$\int\frac{1}{(3x)^2}dx$			

لە ڕاهێنانی 7 تا 15، تەواوکاری بێسنوور بدۆزەوە، پاسەدانی ڕاستی ئەنجامەکەت بەبەکارهێنانی داتاشراوەکەی ئەنجامبدە.

7 $\int(2x-3x^2)dx$

8 $\int(x^3-4x+2)dx$

9 $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

10 $\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}dx$

11 $\int(2x^2-1)^2dx$

12 $\int\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)dx$

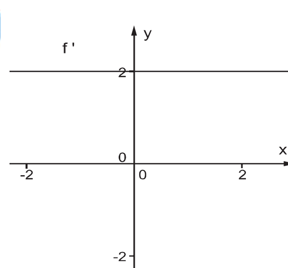
13 $\int(2\sin x+3\cos x)dx$

14 $\int(x^2-\sin x)dx$

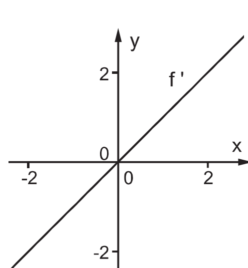
15 $\int(\tan^2x+1)dx$

له ڕاهێنانی 16 تا 18 دووچەماوەی نزیك لەو نەخشانە بكێشە كە داتاشراوی هاوبەشیان هەیە كە وێنە ڕوونكردنەوەكە دەینوێنێت.

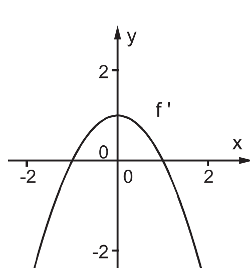
16



17



18



لە دوو ڕاهێنانی 19و 20 نەخشەی $f(x)$ بەزانینی داتاشراوەكەی و خاڵێكی سەر ڕوونكردنەوەی بدۆزەوە.

19 $f'(x)=2x-1$ ؛ $(1,1)$

20 $f'(x)=2(x-1)$ $(3,2)$

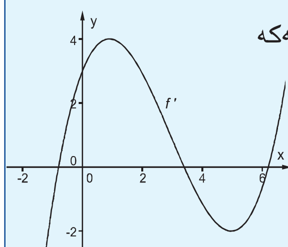
21 **گەشەكردنی ڕووەكان** نەمامگەیەك جۆرێك لەنەمامی كورت دەفرۆشێت دوای 6 ساڵ لەچاندنی. نەخشەی $h'(t)=1.5t+5$ بەڕێسایەك دادەنرێت بۆ تێكڕای گەشەی ئەو جۆرە ڕووەكانە كە بە سم لە ساڵێكدا پێورا بێت، لە ماوەی شەش ساڵەكە، درێژی نەمامەكە $12\,cm$ بوو كاتێك چێنرا $(t=0)$.

أ درێژی ئەو نەمامە بدۆزەوە $h(t)$ دوای t ساڵ.

ب درێژی نەمامەكە لەكاتی فرۆشتنی چەندە؟

دەربارەی چەمكەكان

22 لە وێنەی بەرامبەر ڕوونكردنەوەی f' بۆ نەخشەی f دەردەكەوێت وێنەكە بەكاربهێنە بۆ وەڵامدانەوەی ئەم پرسیارانە ئەگەر زانیت $f(0)=-4$.



أ بەهایەكی نزیكراو بەلاری نەخشەی f بدە كاتێك $x=4$ بێت.

ب ئایا دەكرێت $f(2)=-1$ ؟ وەڵامەكەت ڕوونبكەوە.

ج ئایا دەكرێت $f(5)-f(4)>0$؟ وەڵامەكەت ڕوونبكەوە.

د بەهایەكی نزیكراو بدە بە x كاتێك نەخشەی f بەهای گەورەترین كۆتایی وەردەگرێت. وەڵامەكەت ڕوونبكەوە.

هـ ئەو ماوەیە بخەمڵێنە كە نەخشەی f تیایدا قوپاوە هەروەها تیایدا قۆقزە. بەهایەكی نزیكراوەییەكی بدە بە x لەخاڵی وەرگەڕان.

و بەهایەكی نزیكراوە بدە بە x بۆ ئەوەی f'' ببێتە بچووكترین كۆتایی.

ز وێنەیەكی ڕوونكردنەوەیی بەنزیكراوەیی بۆ نەخشەی f بكێشە.

23 تۆپێك لەبەرزی $2m$ بەخێرایی سەرەتایی $10m/s$ هەڵدرا، بەرزترین خاڵ تۆپەكە دەیگاتێ چەندە؟

24 **تاودان** ئۆتۆمبێلێك لە ترافیك لایت وەستابوو، كاتێك گڵۆپی سەوز دەركەوت، ئۆتۆمبێلەكە بە تاودانی $2m/s^2$ دەرچوو. لەهەمان ساتدا ئۆتۆمبێلەكە، ئۆتۆمبێلێكی بارهەڵگر لێی تێپەڕبوو كە بەخێراییەكی نەگۆڕ برەكە $10m/s$ دەڕۆیشت.

أ دوای چەند مەتر ئۆتۆمبێلەكە دەگاتەوە بارهەڵگرەكە؟

ب خێرایی ئۆتۆمبێلەكە دەبێتە چەند كاتێك دەگاتە بارهەڵگرەكە.

25 فرۆکەیەك بەتاودانێکی نەگۆڕ لەسەر ڕاڕەوی فرۆکەخانە جولاّو بەرزبووە دوای بڕینی $1.5\,km$ لەسەر ڕاڕەوەکەو خێراییەکەی گەیشتە $210\,km/h$. تاودانی فرۆکەکە چەندە؟

ڕاست یان هەڵە **لە ڕاهێنانی 26 تا 30 دیاریبکە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە، یان هەڵەیە هۆیەکە لێکبدەوە، بە دژە نموونەیەك بیسەلمێنە.**

26 هەموو نەخشەیەکی بنەڕەتی بۆ نەخشەیەکی زۆر ڕادەداری پلە n بریتییە لە نەخشەیەکی زۆر ڕادەداری پلە $n+1$.

27 ئەگەر f نەخشەیەکی زۆر ڕادەداربێت، ئەوا نەخشەیەکی بنەڕەتی تاقانە هەیە کە چەماوەکەی بەخاڵی بنەڕەتدا دەڕوات.

28 ئەگەر $F(x)$ و $G(x)$ دوو نەخشەی بنەڕەتی نەخشەی f بن، ئەوا $F(x)=G(x)+C$ کاتێك C ژمارەیەکی ڕاستییە.

29 $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \int g(x)dx$

30 بۆ هەر نەخشەیەکی f تەنها یەك نەخشەی بنەڕەتی هەیە.

31 نەخشەی f بدۆزەوە کە داتاشراوی دووەمی دەکاتە $f''(x) = 2x$ و چەماوەکەی لێکەوتی ئاسۆیی لە خاڵی $(2,0)$ هەبێت.

32 $f'(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 2 \\ 3x & 2 \le x \le 5 \end{cases}$. نەخشەی f بدۆزەوە ئەگەر بزانیت بەردەوامە وە $f(2) = 6$
ئایا ئەم نەخشەیە توانای داتاشراوی لە $x = 2$ هەیە ؟

2-5

تەواوكاری سنووردار
Definite Integral

ئامانجەكان

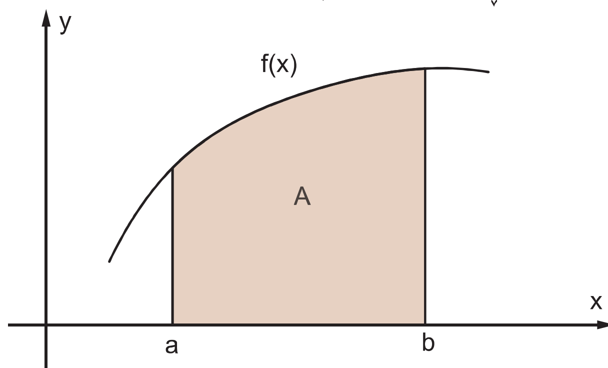
- تەواوكاری سنووردار بە بەكارهێنانی سیفەتەكانی هەژماردەكات.

زاراوەكان
Vocabulary

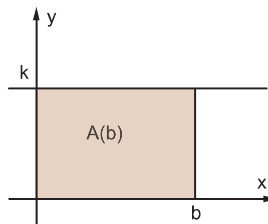
تەواوكاری سنووردار
Definite Integral
سنوورەكانی تەواوكاریەكە
Limits of integration

تەواوكاری سنووردار

لەوانەی پێشوو فێربوویت كە دۆزینەوەی نەخشەی بنەڕەت بۆ نەخشەیەكی دیاریكراو كردارێكە پێچەوانەی داتاشراوە، تەواوكاری بێسنوور بۆ نەخشەی f دەبێتە نەخشەی بنەڕەتی ئەو نەخشە. بەڵام تەواوكاری بێسنوور ڕۆڵێكی تریشی هەیە لەوەی پێشوو كەمترنییە. لەم وانەیەدا فێردەبیت چۆن نەخشەی بنەڕەت بەكاردەهێنیت بۆ شیكاركردنی دووەم جۆری پرسیاری سەرەكی لە هەژماركردنی جیاكاری و تەواوكاری. لەم وانەیەدا فێردەبیت چۆن نەخشەی بنەڕەتی بەكاردەهێنیت بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری سنووردارو بە ڕوونكردنەوەی نەخشەیەك و تەوەری x لە لا یەك و دوو ڕاستەهێڵی $x = a$ و $x = b$ لەلایەكی ترەوە. هێمای A بۆ ڕووبەری ئەو ناوچەیە بەكاربهێنە.



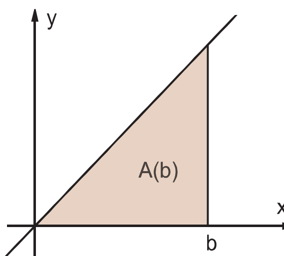
سەرەتا گرنگی بە ڕووبەری $A(b)$ بۆ ناوچەی سنووردراو بە ڕوونكردنەوەی نەخشەكەو تەوەری x لەلایەك و دوو ڕاستەهێڵی $x = 0$ و $x = b$ لەلایەكی ترەوە دەدەین.



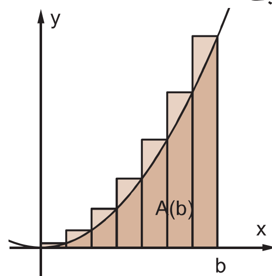
هەوڵدەدەین، شێوازێك بدۆزینەوە بۆ ئەو ڕووبەرە.

ئەگەر $f(x) = k$ ، كاتێك k ژمارەیەكی ڕاستی بێت، ئەوا $A(b) = bk$.

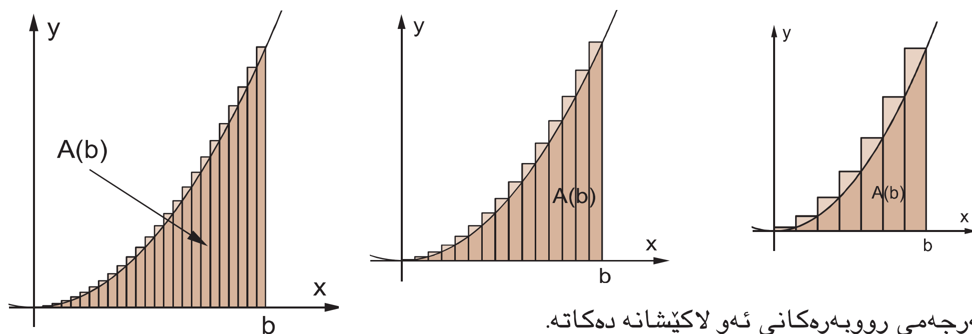
ئەگەر $f(x) = x$ ئەوا $A(b) = \frac{1}{2}b^2$.



ئەگەر $f(x) = x^2$ كارەكە ئاڵۆزتر دەبێت، چونكە ناوچەیەكی سنووردرا بە چەماوەی نەخشەكەو تەوەری x هەردوو ڕاستەهێڵی $x = 0$ و $x = b$ شێوەیەكی ئەندازەیی ناسراوی نییە. هەوڵدەدەین ئەم ڕووبەرە بەشێوەی نزیككراویی بدۆزینەوە. بۆ ئەمەش ماوەی $[0,b]$ بەشدەكەین بۆ n ماوەی یەكسان كەمەودای هەریەكەیان بكاتە $\left(\frac{b}{n}\right)$ و لەسەر ئەو ماوانە لاكێشەكان دروستدەكەین كە بەرزییەكانیان یەك لە دوای یەك بكاتە $f\left(\frac{b}{n}\right) f\left(\frac{2b}{n}\right) \cdots f\left(\frac{nb}{n}\right)$؟ سەرجەمی ڕووبەرەكانی ئەو لاكێشانە بەهای نزیكەیی ڕووبەر $A(b)$ پێكدەهێنێت.



ئەگەر تەماشای ئەم سێ ڕوونکردنەوەی خوارەوە بکەیت، دەبینیت بە زیادبوونی بەهای n ژمارەی لاکێشەکان زیاددەکات وسەرجەمی ڕووبەرەکان نزیك دەبێتەوە لە$A(b)$. بەسوود وەرگرتن لەم تێبینیە دەڵێین $A(b)$ ئامانجی ئەو سەرجەمەیە کاتێك بەهای n بێسنوور زیاد دەکات.



سەرجەمی ڕووبەرەکانی ئەو لاکێشانە دەکاتە.

$$S_n = \frac{b}{n} f\left(\frac{b}{n}\right) + \frac{b}{n} f\left(\frac{2b}{n}\right) + \ldots + \frac{b}{n} f\left(\frac{nb}{n}\right) = \frac{b}{n}\left[\frac{b}{n}\right]^2 + \frac{b}{n}\left[2\frac{b}{n}\right]^2 + \ldots + \frac{b}{n}\left[n\frac{b}{n}\right]^2$$

$$= \frac{b^3}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)$$

بەڵام $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

لەمەوە دەردەچێت:

$$A(b) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \frac{b^3}{n^3} = \frac{1}{3} b^3 \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{2n^3} = \frac{1}{3} b^3 \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3+3n^2+n}{2n^3} = \frac{1}{3} b^3$$

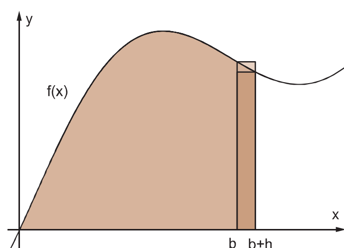
ئەوەی پێی گەیشتین، لەو خشتەیە پوخت کراوەتەوە.

A	$f(x)$
$A = kb$	$f(x) = k$
$A = \frac{1}{2}b^2$	$f(x) = x$
$A = \frac{1}{3}b^3$	$f(x) = x^2$

ئەم خشتەی سەرەوە ئەوە دەردەخات کە ڕووبەری A هەژماردەکرێت بە بەکارهێنانی نەخشەی $F(x)$ کاتێك $A = F(b)$. لەلایەکی ترەوە ئەم خشتە چۆنیەتی دۆزینەوەی نەخشەی $F(x)$ دەردەخات.

پەیوەندی نێوان $f(x)$ و $F(x)$	$F(x)$	A	$f(x)$
$F'(x) = f(x)$	$F(x) = kx$	$A = kb$	$f(x) = k$
$F'(x) = f(x)$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$	$A = \frac{1}{2}b^2$	$f(x) = x$
$F'(x) = f(x)$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$	$A = \frac{1}{3}b^3$	$f(x) = x^2$

لەمەی پێشەوە دەردەچێت کە ڕووبەری $A(b)$ دەکاتە $F(b)$ کاتێك $F(x)$ نەخشەی بنەڕەتی نەخشەکەیە کاتێك $C = 0$. ئەگەر بارە گشتییەکەمان باسکرد کاتێك f نەخشەیەکی بەردەوامە بەپێی وێنەی بەرامبەر دەتوانین ڕووبەری $A(b+h) - A(b)$ سنووردار بکەین بە دوو ڕادە.



بریتییە لە ڕووبەری لاکێشە بچووکەکە و ڕووبەری لاکێشە گەورەکە. بەڵام ڕووبەری لاکێشە بچووکەکە دەکاتە $hf(b+h)$ و ڕووبەری لاکێشە گەورەکە دەکاتە $hf(b)$.

لەمەوە دەردەچێت $hf(b+h) \le A(b+h)-A(b) \le hf(b)$

لەدوایدا $f(b+h) \le \frac{A(b+h)-A(b)}{h} \le f(b)$

کاتێك h لە 0 نزیك دەبێتەوە ئەمەمان بۆ دەردەچێت.

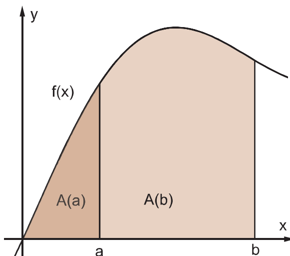
$$\lim_{h\to0} f(b+h) \le \lim_{h\to0}\frac{A(b+h)-A(b)}{h} \le \lim_{h\to0} f(b)$$

بەڵام $\lim_{h\to0} f(b+h) = f(b)$ چونکە f نەخشەیەکی بەردەوامە لە $x=b$ و $\lim_{h\to0}\frac{A(b+h)-A(b)}{h} = A'(b)$

بە پشتبەستن بە پێناسەی داتاشراو $\lim_{h\to0} f(b) = f(b)$.

بە پشتبەستن بە سەلمێنراوی دوو مەرج و لەوەی پێشوو بۆمان دەردەچێت کە $A'(b)=f(b)$ کە $A(x)$ نەخشەی بنەڕەتییە بۆ $f(x)$.

ئەگەر بکەڕینەوە بۆ ڕووبەری ئەو ناوچەیەی سنووردراوە بە چەماوەکە و تەوەری x لەلایەك و ڕاستەهێڵی $x=a$ و $x=b$ لەلایەکی ترەوە.

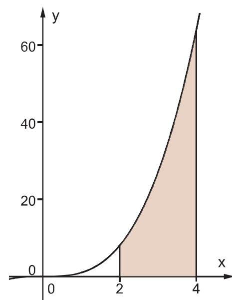


دەردەچێت کە $A(b)-A(a)$ ، $A(y)$

نەخشەی بنەڕەتییە بۆ $f(x)$ واتە $S = A(b)-A(a)$.

لەوەوە دەردەکەوێت نەخشە بنەڕەتییەکان بۆ هەژمارکردنی ڕووبەرەکان بەسوودن.

نموونــــە 1 دۆزینەوەی ڕووبەری ناوچەیەك



ئەگەر $f(x)=x^3$ ڕووبەری ئەو ناوچەیە بدۆزەوە کە سنووردراوە بە چەماوەی f وتەوەری x و هەر دوو ڕاستەهێڵی $x=2$ و $x=4$.

شیکار

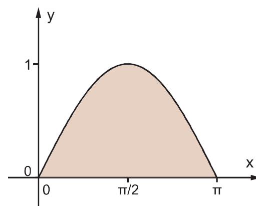
بینیمان کە $A=F(b)-F(a)$ کاتێك F نەخشەی بنەڕەتی f بێت.

دەزانین کە $F(x)=\frac{1}{4}x^4$ نەخشەی بنەڕەتی $f(x)=x^3$

لەوەوە دەردەچێت $A=F(4)-F(2)=\frac{1}{4}4^4-\frac{1}{4}2^4=60$



1. ڕووبەری ناوچەی سنووردراو بەنەخشەی $f(x)=\sin x$ و تەوەری x و هەر دوو ڕاستەهێڵی $x=0$ و $x=\pi$ بدۆزەوە.



پێناسەی تەواوکاری سنووردار

ئەگەر f نەخشەیەکی بەردەوام بێت و a، b دوو بەهای بوارەکەی بن. ئەوا تەواوکاری سنووردار بۆ نەخشەی f لە نێوان a، b دەکاتە $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

کاتێك $F(x)$ نەخشەی بنەڕەتی $f(x)$ بێت. بە a دەوترێت **نزمترین ڕادەی تەواوکاری** و b **بەرزترین ڕادەی تەواوکاری**، و f نەخشەی **بابەتی تەواوکارییە**.

ئەوانەی لەبواری بیرکاریدا کاردەکەن هێمای $\left[F(x)\right]_a^b$ لە جیاتی $F(b)-F(a)$ بەکاردەهێنن تەواوکاری سنووردار چەند سیفەتێکی هەیە وادەکات هەژمارکردنی ئاسان بێت.

سیفەتەکانی تەواوکاری سنووردار

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- ئەگەر f نەخشەیەکی بەردەوام بێت و $f(x) \geq 0$. x هەرچەند بێت لەماوەی $[a,b]$، ئەوا $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- ئەگەر f و g دوو نەخشەی بەردەوام بن و $f(x) \leq g(x)$. x هەر چەند بێت لەماوەی $[a,b]$ ئەوا $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
- ئەگەر f نەخشەیەکی بەردەوام بێت ئەوا $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ نەخشەیەکە توانای داتاشراوی لە دراوسێی a دا هەیە، داتاشراوەکەی $F'(x) = f(x)$ ، بە نەخشەی $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ دەوترێت نەخشەی کەڵەکەبوو.

نموونــــــه 2

هەژمارکردنی تەواوکاری سنووردار

بەهای ئەم تەواوکاریانە هەژماربکە.

أ $\int_2^4 (x^2 - 3x - 2)dx$

ب $\int_{-1}^3 \left(-|x-1| + 2\right)dx$

شیکار

أ بە بشتبەستن بە سیفەتەکانی تەواوکاری سنووردار.

$$\int_2^4 (x^2 - 3x - 2)dx = \int_2^4 x^2dx - \int_2^4 3xdx - \int_2^4 2dx = \int_2^4 x^2dx - 3\int_2^4 xdx - 2\int_2^4 dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_2^4 - 3\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_2^4 - 2\left[x\right]_2^4 = \tfrac{1}{3}\left(4^3 - 2^3\right) - \tfrac{3}{2}\left(4^2 - 2^2\right) - 2\left(4-2\right) = -\tfrac{10}{3}$$

ب لەبەرئەوەی نەخشەکە بەهای ڕووت لەخۆ دەگرێت، دەبێت خۆمان ڕزگاربکەین لە هێمای بەهای ڕووت بۆ ئەوەی بتوانین نەخشە بنەڕەتییەکە بدۆزینەوە ئەویش لە ڕێگای نووسینەوەی تەواوکارییەکە وەك سەرجەمی دوو تەواوکاری بەم شێوەی خوارەوە.

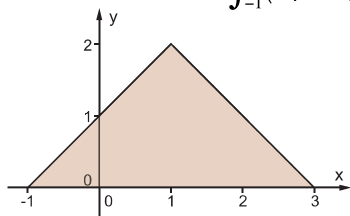
$$\int_{-1}^3 \left(-|x-1| + 2\right)dx = \int_{-1}^1 \left(-|x-1| + 2\right)dx + \int_1^3 \left(-|x-1| + 2\right)dx$$

$$= \int_{-1}^1 (x+1)dx + \int_1^3 (-x+3)dx$$

$$= \int_{-1}^1 xdx + \int_{-1}^1 1dx - \int_1^3 xdx + \int_1^3 3dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^1 + \left[x\right]_{-1}^1 - \left[\frac{1}{2}x^2\right] + \left[3x\right]_1^3$$

$$= 2 - 4 + 6 = 4$$



دەتوانیت وەڵامەکەت ساغبکەیتەوە بەهۆی هەژمارکردنی ڕووبەری سێگۆشەکەی شێوەی سەرەوە



2. بەهای ئەم تەواوکاریانە هەژماربکە.

أ $\int_{-2}^4 \left(x^2 - 2\right)dx$

ب $\int_{-1}^3 \left(1 - |x|\right)dx$

Mean Value بەهای ناوەند

به ژمارەی ڕاستی $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ دەوترێت بەهای ناوەند بۆ نەخشەی f لەماوەی $[a,b]$.

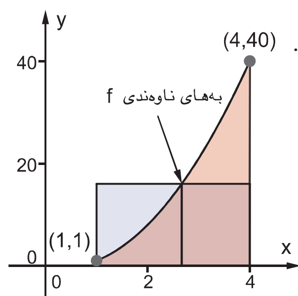
لەئاماردا فێربوویت کە ناوەڕاستەی کۆمەڵێك بەها لەوانەیە بەهایەك نەبێت لەو بەهایانە. ئەگەر ناوەندی نمرەکانی خوێندکارەکانی پۆلێك لە بابەتی بیرکاری65.7 ، ئەمە ئەوە ناگەێنێت کە خوێندکارێك نمرەی 65.7 هێنابێت. ئایا بەهای ناوەندی نەخشەی f لەماوەکەدا بەهایەکە نەخشەکە وەریدەگرێت لە خاڵێکدا دەکەوێتە ئەو ماوەیە؟ وەڵامی ئەو پرسیارە بەڵێیە. بە پشتبەستن بە سەلمێنراوی بەهای ناوەند لە تەواوکارییدا.

سەلمێنراوی 5-2 **بەهای ناوەند**

ئەگەر f نەخشەیەکی بەردەوام بێت لەماوەی داخراوی $[a,b]$ ئەوا بەهایەك هەیە وەك $c\in[a,b]$ کە پاسادانی $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ دەکات.

نموونـــــــه 3 دۆزینەوەی بەهای ناوەند بۆ نەخشە

بەهای ناوەند بۆ نەخشەی $f(x)=3x^2-2x$ لەماوەی $[1,4]$ بدۆزەوە.



شیکار

بەهای ناوەند بۆ نەخشەکە لە ماوەی $[1,4]$ بریتییە لە

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{4-1}\int_1^4\left(3x^2-2x\right)dx=\frac{1}{3}\left[x^3-x^2\right]_1^4$$

$$=\frac{1}{3}\left[64-16-(1-1)\right]=16$$

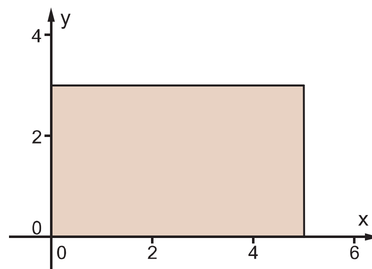


3. بەهای ناوەند بۆ نەخشەی $f(x)=2x+1$ لەماوەی $[1,4]$ بدۆزەوە.

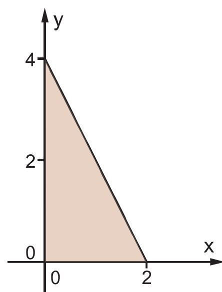
2–5 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تا 6 تەواوکارییەکی سنووردار بۆ ڕووبەری ناوچە سێبەرکراوە بنووسە بەبێ هەژمارکردنی بەهای ڕووبەرەکە.

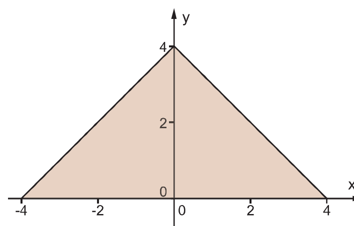
1 $f(x)=3$



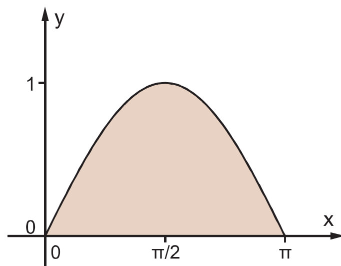
2 $f(x)=4-2x$



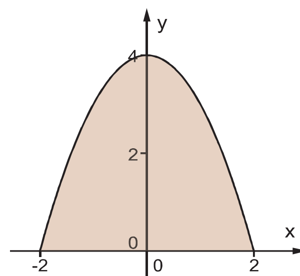
3 $f(x)=-|x|+4$



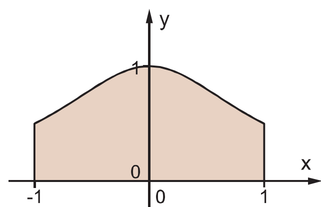
4 $f(x)=\sin(x)$



5 $f(x)=4-x^2$



6 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$



لە ڕاهێنانی 7 تا 10 وێنەی ئەو ناوچەیە بکێشە کە ڕووبەرەکەی دەکاتە تەواوکارییە سنووردارەکە، پاشان یاساکانی هەژمارکردنی ڕووبەر لە ئەندازە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای تەواوکارییەکە.

7 $\int_0^4 \frac{x}{2}dx$ **8** $\int_0^2 (2x+5)dx$ **9** $\int_{-1}^1 (1-|x|)dx$ **10** $\int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$

لە ڕاهێنانی 11 تا 14 بەهای هەر تەواوکارییەك بە بەکارهێنانی ئەم بەهایانە بدۆزەوە.

$$\int_2^4 x^3dx=60 \qquad \int_2^4 xdx=6 \qquad \int_2^4 dx=2$$

11 $\int_2^4 4xdx$ **12** $\int_2^4 (x^3+4)dx$ **13** $\int_2^4 15dx$ **14** $\int_2^4 (6+2x-x^3)dx$

لە ڕاهێنانی 15 تا 26 ئەم تەواوکاریانە هەژمار بکە.

15 $\int_2^7 3dx$

16 $\int_0^1 2xdx$

17 $\int_{-1}^0 (x^2-2)dx$

18 $\int_1^3 (3x^2+5x-4)dx$

19 $\int_1^2 \left(\frac{3}{x^2}-1\right)dx$

20 $\int_{-3}^3 x^{\frac{1}{3}}dx$

21 $\int_1^4 \frac{x-2}{\sqrt{x}}dx$

22 $\int_{-1}^0 \left(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)dx$

24 $\int_1^4 (3-|x-3|)dx$

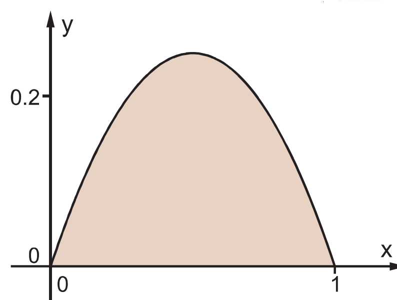
23 $\int_0^3 |2x-3|dx$

25 $\int_0^{\pi} (1+\sin x)dx$

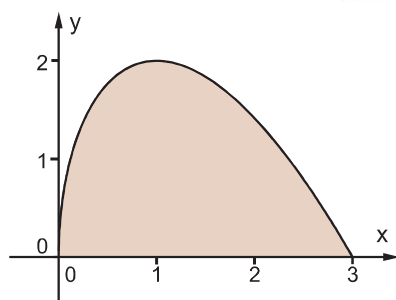
26 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$

لە ڕاهێنانی 27 تا 30 ڕووبەری ناوچە سێبەرکراوەکە بدۆزەوە.

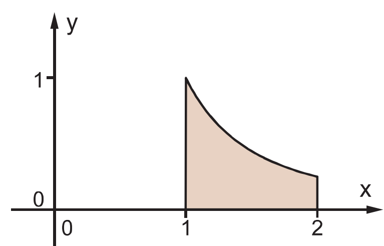
27 $f(x)=x-x^2$



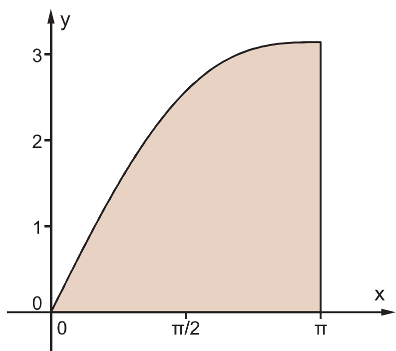
28 $f(x)=(3-x)\sqrt{x}$



29 $f(x)=\frac{1}{x^2}$



30 $f(x)=x+\sin x$



لە دوو ڕاهێنانی 31 و 32 ڕووبەری ئەو ناوچە بدۆزەوە کە سنووردراوە بە چەماوەی $f(x)$ و تەوەری x و دوو ڕاستەهێڵی $x=a$ و $x=b$.

31 $f(x)=3x^2+1$ $a=0$ $b=2$

32 $f(x)=1+\sqrt[3]{x}$ $a=0$ $b=8$

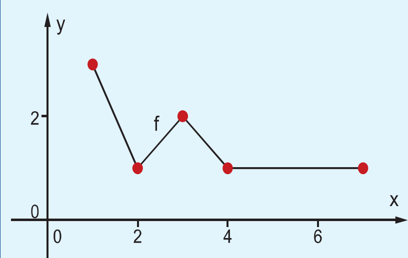
دەربارەی چەمکەکان

33 وێنەی بەرامبەر بەکاربهێنە.

أ $\int_1^7 f(x)dx$ بدۆزەوە.

ب بەهای ناوەند بۆ نەخشەی f لەماوەی $[1,7]$ بدۆزەوە.

ج شیکاری دوو پرسیاری پێشوو دووبارە بکەوە دوای ڕاکێشانی نەخشەکە بە دوو یەکە بۆ سەرەوە.



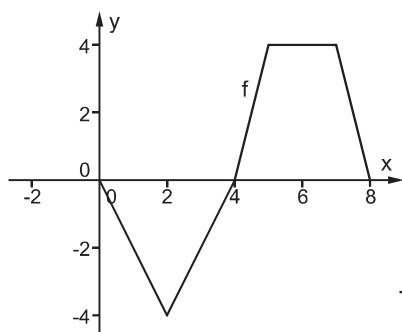
34 g نەخشەیەکی پێناسەکراوە وەك $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ کاتێك f نەخشەیەکە ڕوونکردنەوەکەی لەوێنەی بەرامبەردا دەردەکەوێت.

أ بەهایەکی نزیکراوە بدە بە $g(0)$ ، $g(2)$ ، $g(4)$ ، $g(6)$ ، $g(8)$.

ب فراوانترین ماوە بدۆزەوە کە نەخشەکە تێیدا ڕوو لە زیادبوونە و تێیدا ڕوو لەکەمبوونە.

ج بەها بەرزەکان و نزمەکانی g بدۆزەوە.

د وێنەی ڕوونکردنەوەیی نزیکراوە بۆ چەماوەی g بکێشە.



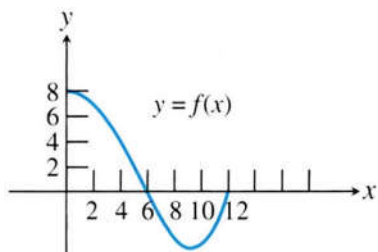
لە ڕاهێنانی 35 و 36 دا $F'(x)$ بدۆزەوە.

35 $F(x)=\int_8^x \sqrt[3]{t}dt$

36 $F(x)=\int_0^x t\left(t^2+1\right)dt$

37 **هەڵە لە کوێیە؟** هەڵە لەکوێیە لە نووسینی $\int_{-1}^{1} x^{-2}dx=\left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1}=(-1)-1=-2$.

38 $H(x)=\int_0^x f(t)dt$ کاتێك f نەخشەیەکی بەردەوامە بوارەکەی ماوەی $[0, 12]$ ـەو چەماوەکەی لە وێنە بەرامبەردایە.



أ $H(0)$ بدۆزەوە.

ب لە چ ماوەیەکدا H نەخشەیەکی ڕوو لەزیادبوونە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

ج لە چ ماوەیەکدا ڕوونکردنەوەی H قۆقزە؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

د $H(12)$ مووجەبە یان سالب؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

هـ لە کوێدا نەخشەی H بەرزترین کۆتایی خۆجێی هەیە؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

و جۆری ئەو بەرزترین کۆتایی خۆجێیە دیاریبکە. وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

بەشی
5

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

5–1 تەواوکاری بێسنوور

1 هەریەکە لەم تەواوکارییە بێسنوورانە بدۆزەوە.

أ $\int\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^2}\right)dx$ ب $\int\frac{1+2\cos x}{3}dx$ ج $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}dx$

5–2 تەواوکاری سنووردار

2 هەریەك لەم تەواوکارییە سنووردارانە بدۆزەوە.

أ $\int_{-1}^{0}(2x-1)(x+1)dx$ ب $\int_{0}^{\frac{3\pi}{4}}(1-|\cos x|)dx$

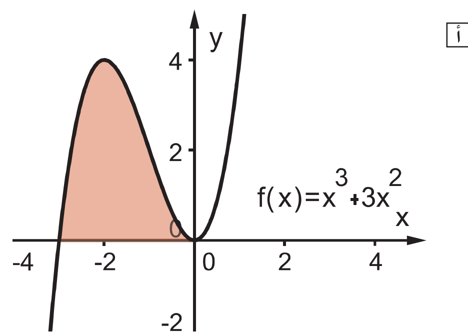
3 ئەگەر $\int_{-1}^{2}f(x)dx=3$ و $\int_{-1}^{4}f(x)dx=2$ ، ئەوا بەهای ئەمانە بدۆزەوە.

أ $\int_{-1}^{2}(x-2f(x))dx$ ب $\int_{2}^{4}f(x)dx$

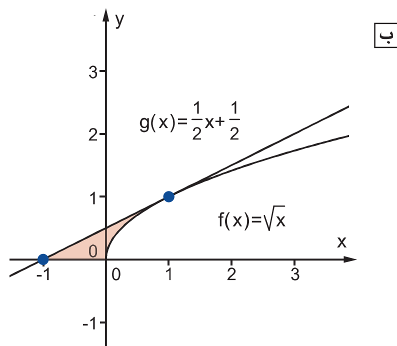
5–2 هەژمارکردنی ڕووبەرەکان

4 ڕووبەری ناوچە سێبەرکراوەکان بدۆزەوە.

أ



ب



5–2 تاودان

5 خێرایی ئۆتۆمبێلێك 30m/s بوو کاتێك شۆفێرەکە پێی لە برێك نا، دوای دوو چرکە ئۆتۆمبێلەکە ڕاوەستا. ئەگەر وادانرا تاودانی ئۆتۆمبێلەکە نەگۆڕە لە ماوەی برێك کردنەکەدا، ئەو تاودانە و ئەو دوورییەی بڕیویەتی بدۆزەوە لەو کاتەی برێکی گرتوە تا وەستاوە.

3-5

هەژمارکردنی تەواوکاری
Integration Methods

ئامانجەکان

- تەواوکاری سنووردار هەژماردەکات بەڕێگای تەواوکاری بەبەشبەشکردن.
- تەواوکاری سنووردار هەژماردەکات بەڕێگای لەجیاتیدانانی گۆڕاو.

زاراوەکان
Vocabulary

تەواوکاری بە بەشبەشکردن
Integration by parts

تەواوکاری بە لەجیاتیدانانی گۆڕاو
Integration by Substitution

هەژمارکردنی تەواوکاری، سنوورداربێت یان بێسنوور بەکارێکی گران دادەنرێت بەبەراوردکردن بە هەژمارکردنی داتاشراو. دۆزینەوەی نەخشەی بنەڕەت بۆ نەخشەیەکی دیاریکراو هەموو کات کارێکی ئاسان نییە، بۆ زاڵبوون بەسەر ئەو ئاستەنگانە بیرکاری ناسان لەم بوارەدا گەیشتنە چەند ڕێگایەکی جیاواز. لەگەڵ بەکارهێنانی ڕێسا بنەڕەتییەکانی دۆزینەوەی تەواوکاری وەك لەپێشەوە باسکرا دوو ڕێگای تریش هەن دەتوانرێت لەزۆر باردا پەنایان بۆ ببەین، ئەویش ڕێگای تەواوکاری بە بەشبەشکردن و ڕێگای تەواوکاری بە لەجیاتیدانانی گۆڕاوە.

تەواوکاری بە بەشبەشکردن

زانای بیرکاری لایبنیز Leibniz ئەم ڕێگایەی بەکارهێنا: ئەگەر $u(x)$ نەخشەیەك بێت بەپێی x ئەوا $du = u'(x)dx$ ، du بە جیاکاری $u(x)$ و dx بە جیاکاری x ناونا. ئەو ڕێگایە بەکاردەهێنین، چونکە وادەکات دوو بابەتەکەی ئەم وانەیە ئاسان بن.

ڕێگای تەواوکاری بە بەشبەشکردن لە ڕێسای داتاشراوی ئەنجامی لێکدانی دوو نەخشە دەردەچێت.

وەك دەزانین $(uv)' = uv' + vu'$.

لەمەوە دەردەچێت

$$d(uv) = (uv)'dx = (uv' + vu')dx = uv'dx + vu'dx = udv + vdu$$

لەمەوەش

$$u(x)v(x) = \int \left[u(x)v(x)\right]' dx = \int \left(u(x)v'(x) + v(x)u'(x)\right)dx$$

$$= \int u(x)v'(x)dx + \int v(x)u'(x)dx$$

ئەمەی پێشوو بەم شێوەیە دەنووسرێت

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

یان $\int udv = uv - \int vdu$

سەرکەوتنی بەکارهێنانی ئەم ڕێگایە دەکەوێتە سەر باش دیاریکردنی u و dv هەردەم هەوڵبدە u وا هەڵبژێریت کە داتاشراوەکەی لەخۆی ئاسانتربێت.

نموونە 1 تەواوکاری بە بەشبەشکردن

$\int xe^x dx$ بدۆزەوە.

شیکار

وەك دیارە داتاشراوی $f(x) = x$ ئاسانترە لە نەخشەکە خۆی. کەواتە $u = x$ و $dv = e^x dx$ هەڵبژێرە.

ئینجا du و v بدۆزەوە. دەردەچێت $u'(x) = 1$ ، $du = u'(x)dx = dx$

$$v(x) = \int v'(x)dx = \int e^x dx = e^x$$

ئێستا ڕێسای تەواوکاری بە بەشبەشکردن بەکاربهێنە.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int (1)e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$



1. $\int x^2 \ln x dx$ بدۆزەوە.

نموونــــــه 2 تەواوکاری نەخشەی یەك ڕادەیی

$\int_1^e \ln x dx$ بدۆزەوە.

شیکار

سەرەتا تەواوکاری بێسنوور $\int \ln x dx$ بدۆزەوە. دیارە کە داتاشراوی $f(x) = \ln x$ لە نەخشەکە خۆی ئاسانترە، کەواتە $u = \ln x$ و $dv = dx$ هەڵبژێرە ئینجا du و v بدۆزەوە، $du = u'(x)dx = \frac{1}{x}dx$ و $v = \int dx = x$. ڕێسای تەواوکاری بە بەشبەشکردن بەکاربهێنە.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int\left(\frac{1}{x}\right)(x)dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

ئێستا تەواوکارییە سنووردارەکە هەژمار بکە.

$$\int_1^e \ln x dx = \left[x(\ln x - 1)\right]_1^e = (e)(\ln(e) - 1) - (1)(\ln(1) - 1) = e(1-1) - (0-1) = 1$$



.2 $\int_1^3 \ln 3x dx$ بدۆزەوە.

تەواوکاری بە لەجیاتیدانانی گۆڕاو

بۆ بەکارهێنانی ڕێسای تەواوکاری بە لەجیاتیدانانی گۆڕاو سوود لە داتاشراوی نەخشەی ئاوێتە وەردەگرین بە بەکارهێنانی ڕێگای لایبنیز Leibniz ئەگەر $u = g(x)$ ئەوا $du = g'(x)dx$ ئەوکاتە،

$$\int f\left(g(x)\right)g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F\left(g(x)\right) + C$$

نموونــــــه 3 تەواوکاری بە لەجیاتیدانانی گۆڕاو

$\int 2x(x^2+1)^2 dx$ بدۆزەوە.

شیکار

وا دابنێ $u = x^2 + 1$ لەوەوە دەردەچێت $du = 2xdx$ بەمەش

$$\int 2x(x^2+1)^2 dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}(u)^3 + C = \frac{1}{3}(x^2+1)^3 + C$$



.3 $\int 2x\sqrt{x^2-1}dx$ بدۆزەوە.

نموونــــــه 4 هەژمارکردنی تەواوکاری سنووردار بە لەجیاتیدانانی گۆڕاو

$\int_0^1 x(x^2+1)^3 dx$ بدۆزەوە.

شیکار

تەواوکاری بێسنووری $\int x(x^2+1)^3 dx$ بدۆزەوە ئەویش بە لەجیاتیدانانی $u = x^2+1$ کەواتە $du = 2xdx$ یان $xdx = \frac{1}{2}du$ لەوەوە دەردەچێت.

$$\int x(x^2+1)^3 dx = \int \frac{1}{2}u^3 du = \frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^4}{4}\right]$$

ئێستا تەواوکارییە سنووردارە کە هەژمار بکە.

$$\int_0^1 x(x^2+1)^3 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}$$



.4 $\int_1^2 x\sqrt{x^2+1}dx$ بدۆزەوە.

3-5 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تا 4 نەخشەکە بە تەواوکاری گونجاو لەو تەواوکارییە بێسنوورانە ببەستەوە.

أ $\int \ln x dx$ ب $\int x\sin x dx$ ج $\int x^2 e^x dx$ د $\int x^2 \cos x dx$

1 $f(x) = \sin x - x\cos x$ **2** $f(x) = x^2 \sin x - 2x\cos x - 2\sin x$

3 $f(x) = x^2 e^x - 2xe^x - 2e^x$ **4** $f(x) = -x + x\ln x$

لە ڕاهێنانی 5 تا 8 u و dv دیاریبکە بۆ دەستپێکردنی تەواوکاری بە بەشبەشکردن (تەواوکارییەکە داواکراو نییە).

5 $\int xe^{2x} dx$ **6** $\int (\ln x)^2 dx$ **7** $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ **8** $\int x^2 \cos x dx$

لە ڕاهێنانی 9 تا 10 $g(x)$ جیابکەوە لە $\int f(g(x))g'(x)dx$

9 $\int 10x(5x^2+1)^2 dx$ **10** $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

لە ڕاهێنانی 11 تا 14 تەواوکاری بێسنوور بدۆزەوە بە گونجاوترین ڕێگا.

11 $\int (x^2-1)e^x dx$ **12** $\int x\sqrt{x-1} dx$ **13** $\int x\cos x dx$ **14** $\int x^3 \sin x dx$

لە ڕاهێنانی 15 تا 17 نەخشەی بنەڕەتی بۆ f کە بەخاڵێکی دیاریکراودا دەڕوات.

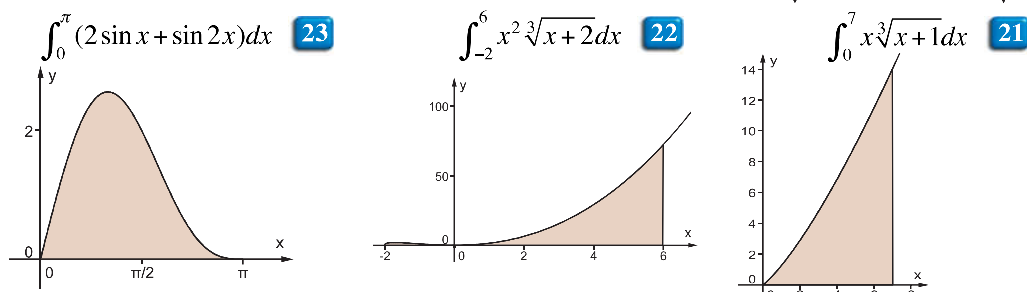
15 $f(x) = x\cos\frac{x}{2}$ ، $(0,3)$ **16** $f(x) = 2x(4x^2-10)^2$ ، $(2,10)$ **17** $f(x) = -2x\sqrt{8-x^2}$ ، $(2,7)$

ئەم تەواوکارییە سنووردارە هەژماربکە 18 تا 20.

18 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ **19** $\int_0^1 x^2 e^x dx$ **20** $\int_0^{\pi} x\sin 2x dx$

لە ڕاهێنانی 21 تا 23 ڕووبەری ناوچە سێبەرکراوەکە بدۆزەوە.

21 $\int_0^7 x\sqrt[3]{x+1} dx$ **22** $\int_{-2}^6 x^2 \sqrt[3]{x+2} dx$ **23** $\int_0^{\pi} (2\sin x + \sin 2x) dx$



24 ئەمە $\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$ بەکاربهێنە بۆ دەستکەوتنی بەهای ئەو تەواوکارییە سنووردارانە بەبێ ئەوەی تەواوکاری ئەنجامبدەیت.

أ $\int_{-2}^0 x^2 dx$ ب $\int_{-2}^2 x^2 dx$ ج $\int_0^2 -x^2 dx$ د $\int_{-2}^0 3x^2 dx$

دەربارەی چەمکەکان

25 ڕوونیبکەوە بۆچی $\int x(5-x^2)^3 dx = \int u^3 du$ کاتێک $u = 5 - x^2$.

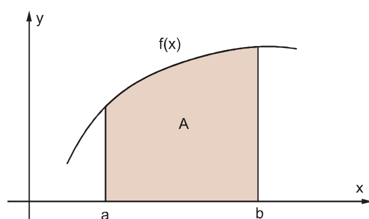
26 ڕوونیبکەوە بۆچی $\int_{-2}^2 x(x^2+1)^2 dx = 0$ بەبێ ئەوەی تەواوکاری ئەنجامبدەیت.

27 $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}} dx$ بدۆزەوە بە بەکارهێنانی:

أ تەواوکاری بە بەشبەشکردن کاتێک $dv = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} dx$ بێت. ب بە لەجیاتدانانی گۆڕاو کاتێک $u = 4 + x^2$ بێت.

4–5 جێبەجێكردنەكانی تەواوكاری

Applications of Integral

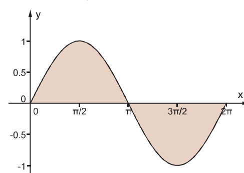


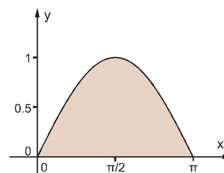
ئامانجەكان

- تەواوكاری سنووردار بۆ هەژماركردنی ڕووبەر بەكاردەهێنێت.
- تەواوكاری سنووردار بۆ هەژماركردنی قەبارە بەكاردەهێنێت.

هەژماركردنی ڕووبەر

لەوانەكانی پێشوو فێربوویت كە تەواوكاری سنووردار یارمەتیدەدات بۆ هەژماركردنی ڕووبەری ئەو ناوچەی سنووردراوە بە ڕوونكردنەوەی نەخشە و تەوەری x لەلایەك و هەردوو ڕاستەهێڵی $x=a$ و $x=b$ لە لایەكی تر. نەخشەكە موجەبە لە ماوەی $[a,b]$ واتا $f(x)>0$ بۆ هەربەهایەكی x لەو ماوەیەدا. بۆ ئەوەی گرنگی ئەمە تێبگەیت هەژماری $\int_0^{\pi}\sin xdx$ و $\int_0^{2\pi}\sin xdx$ بكە.





$$\int_0^{\pi}\sin xdx=-[\cos x]_0^{\pi}=-\cos\pi-(-\cos 0)=2$$

$$\int_0^{2\pi}\sin xdx=[\cos x]_0^{2\pi}=\cos 2\pi-(-\cos 0)=0$$

لە ئەنجامەكانی پێشوو بۆت دەردەكەوێت كە $\int_0^{2\pi}\sin xdx=0$ واتا بەهای $\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx$ ژمارەیەكی سالبە ئەمەش وامان لێدەكات جیاوازی بكەین لەنێوان ئەو بارەی نەخشەكە تێیدا سالب نییە لەماوەی $[a,b]$ كاتێك $a<b$ و ئەو بارەی نەخشەكە تێیدا موجەب نییە لە هەمان ماوەدا.

> **هەژماركردنی ڕووبەر**
>
> ئەگەر a ، b دوو ژمارە ڕاستی بن، بەمەرجێك $a<b$ ئەوا ڕووبەری ئەو ناوچەیەی كە بە ڕوونكردنەوەیی نەخشەی $f(x)$ و تەوەرەی x و دوو ڕاستە هێڵی $x=a$ ، $x=b$ سنووردراوو دەكاتە $\int_a^b f(x)dx$.

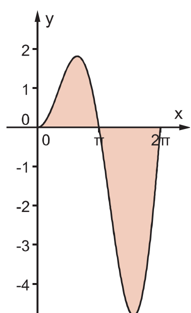
بۆ هەژماركردنی ناوچەیەكی سنووردراو بە ڕوونكردنەوەی نەخشەی f تەوەری x و دوو ڕاستەهێڵی $x=a$ و $x=b$ ، پێویستە سەرەتا ماوەی $[a,b]$ بەشبكەیت، بەشێوەیەك نەخشەكە هێمایەكەی بپارێزیت لە هەموو بەشەكان، پاشان ڕووبەری هەموو بەشەكان هەژماربكە لەكۆتایدا ڕووبەرەكان كۆبكەوە.
بەگەڕانەوە بۆ ڕووبەری سنووردراو بە نەخشەی $f(x)=\sin x$ و تەوەری x دوو ڕاستەهێڵی $x=0$ و $x=2\pi$ ئەوا ئەو ڕووبەرە دەكاتە $\int_0^{\pi}\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx=2-(-2)=4$.

نموونە 1 هەژماركردنی ڕووبەر

ڕووبەری ناوچەی سنووردراو بە ڕوونكردنەوەی نەخشەی $f(x)=x\sin x$ و تەوەری x لەلایەك و دوو ڕاستەهێڵی $x=0$ و $x=2\pi$ لەلایەكی تر بدۆزەوە.

شیكار

سەرەتا نەخشەی بنەڕەتی بۆ نەخشەی f بدۆزەوە. پێشتر زانیت $F(x)=\sin x-x\cos x$ نەخشەی بنەڕەتییە بۆ نەخشەی $f(x)=x\sin x$. ئینجا وێنەی ڕوونكردنەوەی نەخشەكە بكێشە بۆ دیاریكردنی چۆنیەتی بەشبوونی ماوەكە $[0,2\pi]$.



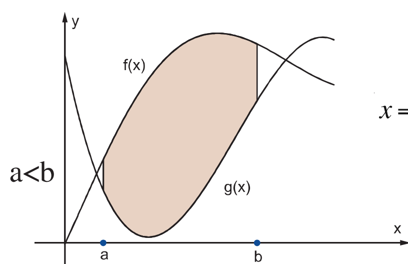
نەخشەکە سالب نییە لە ماوەی $[0, \pi]$ و موجەب نییە لەماوەی $[\pi, 2\pi]$.
لەمەوە دەردەچێت کە ڕووبەری ناوچەی سێبەرکراوی A دەکاتە.

$$A = \int_0^{\pi} x\sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} x\sin x dx = \left[\sin x - x\cos x\right]_0^{\pi} - \left[\sin x - x\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}$$
$$= \left[\sin(\pi) - (\pi)\cos(\pi)\right] - \left[\sin(0) - (0)\cos(0)\right]$$
$$- \left[\left[\sin(2\pi) - (2\pi)\cos(2\pi)\right] - \left[\sin(\pi) - (\pi)\cos(\pi)\right]\right]$$
$$= \left[\pi - 0\right] - \left[-2\pi + (-\pi)\right] = 4\pi$$



1. ڕووبەری ئەو ناوچەیە بدۆزەوە سنووردراوە بە ڕوونکردنەوەی $f(x) = \cos x$
و تەوەری x لەلایەك و دوو ڕاستەهێڵی $x = -\pi$ و $x = \pi$.

ڕووبەری نێوان چەماوەی دوو نەخشە



بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری سنووردراو بە ڕوونکردنەوەی
هەردوو نەخشەی $f(x)$ و $g(x)$ و دوو ڕاستەهێڵی $x = a$ و $x = b$
کاتێك $a < b$ ئەمەی خوارەوە بەکاربهێنە.

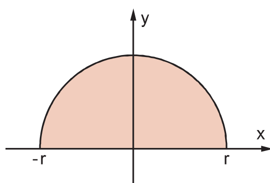
هەژمارکردنی ڕووبەری نێوان چەماوەی دوو نەخشە

ئەگەر f ، g دوو نەخشەی بەردەوام بن وپاسادانی $f(x) \geq g(x)$ لەماوەی $[a,b]$، ئەوا ڕووبەری
سنووردراو بە ڕوونکردنەوەی هەردوو نەخشەی $f(x)$ و $g(x)$ و هەردوو ڕاستەهێڵی $x = a$ و $x = b$
کاتێك $a < b$ دەکاتە.

$$A = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$$

نموونـــــە 2

ڕووبەری بازنە



تەواوکاری بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری بازنەیەك نیوەتیرەکەی r بێت.

شیکار

ئەنجامەکە ناگۆڕێت ئەگەر چەقی بازنەکە لە خاڵی بنەڕەت دابنێت، ئەوکات هاوکێشەی بازنەکە دەبێتە $x^2 + y^2 = r^2$. ڕووبەری نیوەی بازنەکەی دەکەوێتە سەرەوەی تەوەری x بەسە بیدۆزییەوە.
ئەو ڕووبەرە A بریتییە لە ڕووبەری نێوان ڕوونکردنەوەی $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ و $g(x) = 0$ لەلایەك و دوو ڕاستەهێڵی $x = -r$ و $x = r$ لەلایەکی تر.

$$A = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

بۆ دۆزینەوەی ئەم تەواوکارییە گۆڕاوەکە دەگۆڕین $x = r\cos t$ کەواتە $dx = -r\sin t dt$
لەدواییدا:

$$A = \int_{\pi}^{0} \sqrt{r^2 - r^2\cos^2 t}\,(-r\sin t)dt = \int_{\pi}^{0} -r^2\sqrt{1-\cos^2 t}\,\sin t dt = r^2\int_0^{\pi} \sin^2 t dt$$
$$= r^2\int_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt = \frac{r^2}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{r^2}{2}\left[\pi - 0\right] = \frac{\pi r^2}{2}$$

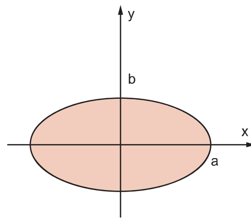
کەواتە ڕووبەری بازنەکە دەکاتە πr^2.

لەبیرت بێت

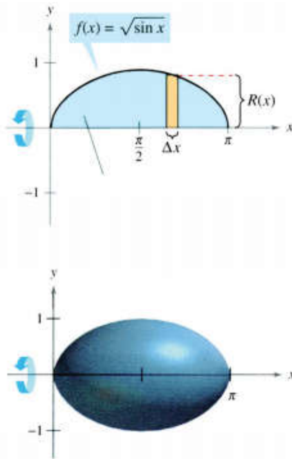
بۆ ئەوەی x هەموو بەهایەکانی ماوەی $[-r, r]$ وەربگرێت t دەبێت هەموو بەهایەکانی ماوەی $[\pi, 2\pi]$ وەربگرێت کەواتە نزمترین ڕادەی تەواوکارییەکە π و بەرزترین ڕادەی 2π دەبێت.

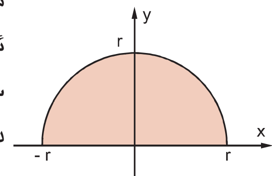


2. ئەم برگە ناتەواوەی بەرامبەرت چەماوەیەکی داخراوە هاوکێشەکەی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ئەم جۆرە چەماوانە لەبەشی داهاتوودا فێردەبیت، بیسەلمێنە ڕووبەری ئەو برگە ناتەواوە دەکاتە πab.



هەژمارکردنی قەبارەکان





تەواوکاری سنووردار بۆ هەژمارکردنی قەبارەکان بەکاردێت. لەمەودوا هەژمارکردنی قەبارەی بارێك (بارێکی تایبەت) لەبارەکان فێردەبێت، ئەویش باری قەبارەی ئەو تەنەیە کە دەستت دەکەوێت لە ئەنجامی سووڕانی بەشێك لە ڕوونکردنەوەی نەخشە $f(x)$، لە ماوەی $[a, b]$دا بە دەوری تەوەری x بە خولێکی تەواو لە بۆشاییدا. بۆ نموونە گۆ: گۆیەکت دەست دەکەوێت کە نیوەتیرەکەی r بێت و چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت لە ئەنجامی سوڕانەوەی نیوەی سەرەوەی بازنەی $x^2+y^2=r^2$ بەدەوری تەوەری x بە خولێکی تەواو.

قەبارەی ئەو جۆرە تەنانە هەژمار دەکرێت بە بەکارهێنانی ئەو ڕێساییەی خوارەوە.

هەژمارکردنی قەبارەی تەنێکی خولاوە

ئەگەر f نەخشەیەکی بەردەوام بێت ئەوا قەبارەی ئەو تەنەی پەیدا دەبێت لە ئەنجامی سوڕانەوەی بەشێك لە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ بەخولێکی تەواو لە بۆشاییدا بەدەوری تەوەری x لە ماوەی $[a,b]$، بە پێی ئەم ڕێسایە هەژمار دەکرێت $V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$.

نموونە 3 قەبارەی گۆ

قەبارەی گۆیەك بدۆزەوە، نیوەتیرەکەی r بێت.

شیکار

ئەنجامەکە ناگۆڕێت ئەگەر چەقی گۆیەکە لە خاڵی بنەڕەت دابنێیت. لەبەرئەوەی ئەو گۆیە نیوەتیرەکەی r و چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە پەیدادەبێت لە ئەنجامی سوڕانەوەی نیوەی سەرەوەی بازنەی $x^2+y^2=r^2$ خولێکی تەواو بەدەوری تەوەری x، قەبارەکەی دەکاتە بەهای تەواوکاری.

$$V=\pi\int_{-r}^{r}(f(x))^2\,dx=\pi\int_{-r}^{r}y^2dx=\pi\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx=\pi\int_{-r}^{r}r^2dx-\pi\int_{-r}^{r}x^2dx$$

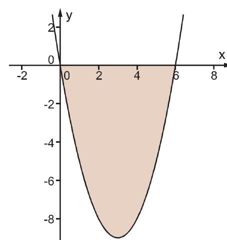
$$=\pi\left[r^2x-\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}=\left[\pi r^3-(-r^3)-\tfrac{1}{3}\left(r^3-(-r)^3\right)\right]=\pi\left[2r^3-\tfrac{2}{3}r^3\right]=\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

کەواتە قەبارەی گۆیەك نیوەتیرەی r بێت دەکاتە $v=\frac{4}{3}\pi r^3$.

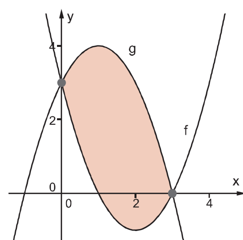
ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تا 3 تەواوکاری سنووردار بۆ ڕووبەری ناوچەی سێبەرکراو بنووسە.

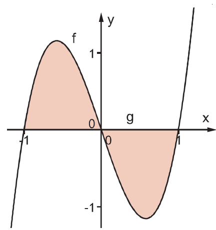
1 $f(x)=x^2-6x$ ، $g(x)=0$



2 $f(x)=x^2-4x+3$ ، $g(x)=-x^2+2x+3$



3 $f(x)=3\left(x^3-x\right)$ ، $g(x)=0$



لە ڕاهێنانی 4 تا 6 نەخشەی ناو تەواوکاری بەشێوەی جیاوازی نێوان دوو نەخشە دەردەکەوێت، ڕوونکردنەوەی هەر نەخشەیەك بکێشە،و ئەو ناوچەی کە تەواوکارییەکە ڕووبەرەکەی دەنوێنێت سێبەریکە.

4 $\int_0^4\left[(x+1)-\frac{x}{2}\right]dx$

5 $\int_2^3\left[4\left(\frac{x^3}{3}-x\right)-\frac{x}{3}\right]dx$

6 $\int_0^1\left[e^x(-x+1)\right]dx$

لە دوو ڕاهێنانی 7 و 8 ئەو بەهایە هەڵبژێرە کە باشترین خەمڵاندن بۆ ڕووبەری سنووردراو بە ڕوونکردنەوەی چەماوەی دوو نەخشەکە پێکدەهێنێت.

7 $f(x)=x+1$ ؛ $g(x)=(x-1)^2$ ؛ أ -2 ب 2 ج 10 د 4 هـ 8

8 $f(x)=2-\frac{1}{2}x$ ؛ $g(x)=2-\sqrt{x}$ ؛ أ 1 ب 6 ج -3 د 3 هـ 4

لە ڕاهێنانی 9 تاکو 12 دا ئەو ڕووبەرە بدۆزەوە کە سنووردراوە بە تەوەری x و ڕوونکردنەوەی نەخشەکە و دوو ڕاستەهێڵی $x=a$ و $x=b$.

9 $f(x)=\sin x$ ؛ $a=0$ ؛ $b=\pi$

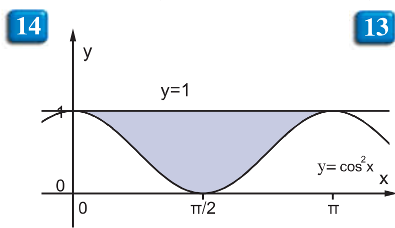
10 $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ ؛ $a=-\frac{\pi}{4}$ ؛ $b=\frac{\pi}{4}$

11 $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ ؛ $a=-3$ ؛ $b=3$

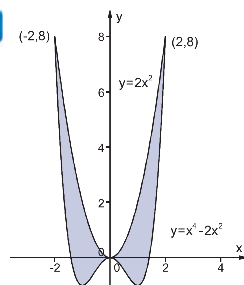
12 $f(x)=e^{2x}$ ؛ $a=0$ ؛ $b=1$

لە ڕاهێنانی 13 تا 15 ڕووبەری ناوچەی سێبەرکراو بدۆزەوە.

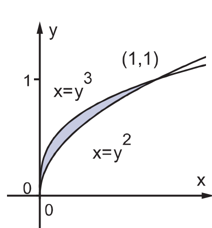
13



14



15



لە ڕاهێنانی 16 تا 21 خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی دوو نەخشەکە بدۆزەوە، لە پاشاندا ڕووبەری ئەو ناوچەی سنووری دەدەن بدۆزەوە.

16 $f(x)=x^2-2$ ؛ $g(x)=2$

17 $f(x)=7-2x^2$ ؛ $g(x)=x^2-4$

18 $x+y^2=0$ ؛ $x+3y^2=2$

19 $x+y^2=3$ ؛ $4x+y^2=0$

20 $f(x)=8\cos x$ ؛ $g(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ ؛ $-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{3}$

21 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ ؛ $g(x)=x$

لە دوو پرسیاری 22 و 23 دا بەهای b بدۆزەوە کاتێك ڕاستەهێڵی $y=b$ ناوچەی سنووردراو بە دوو ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بەش دەکات بۆ دوو بەشی یەکسان لە ڕووبەردا.

22 $g(x)=0$ ؛ $f(x)=9-x^2$ **23** $g(x)=0$ ؛ $f(x)=9-|x|$

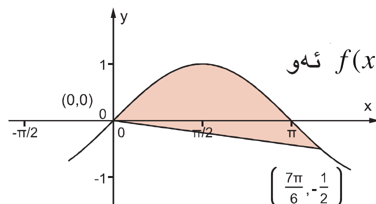
ڕاست یان هەڵە؟ **لە پرسیاری 24 تاکو 26، دیاریکە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە، هۆیەکەی لێکبدەوە، یان هەڵەیە بە دژە نموونەیەك بیسەلمێنە.**

24 ئەگەر ڕووبەری ناوچەی سنووردراو بە هەردوو ڕوونکردنەوەی f و g بکاتە 1، ئەوا ڕووبەری سنووردراو بە دوو چەماوەی $h(x)=f(x)+c$ و $k(x)=g(x)+c$ ئەویش دەکاتە 1.

25 ئەگەر $\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=A$ ئەوا $\int_a^b[g(x)-f(x)]dx=-A$.

26 ئەگەر هەردوو چەماوەی f و g لە خاڵێکدا کە پۆوتانی x ی لە ناوەڕاستی a و b دایە یەکتری ببڕن. ئەوا $\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=0$.

27 **ڕووبەر** ڕووبەری سنووردراو بە چەماوەی نەخشەی $f(x)=\sin x$ ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی کە خاڵی بنەڕەت دەگەیێنێت بە خاڵی $\left(\frac{7\pi}{6},-\frac{1}{2}\right)$ بدۆزەوە وەك لە وێنەکەدا دەردەکەوێت.



دەربارەی چەمکەکان

28 دوو ڕوونکردنەوەی نەخشەکانی $f(x)=x^4-2x^2+1$ و $g(x)=1-x^2$ لە 3 خاڵدا یەکتردەبڕن. لەگەڵ ئەوەش دەتوانین ڕووبەری نێوانیان هەژماربکەین بە بەکارهێنانی یەك تەواوکاری سنووردار هۆیەکانی ئەم کارە ڕوونبکەوە و تەواوکاریەکە بنووسە.

لە پرسیاری 29 تا 32 قەبارەی ئەو تەنە بدۆزەوە کە لە ئەنجامی خولانەوەی ناوچە دیاریکراو بە ڕوونکردنەوەی هاوکێشەکان بەدەوری تەوەری x دروست دەبێت.

29 $x=2$ ، $y=0$ ، $y=x^2$ **30** $y=0$ ، $y=\sqrt{9-x^2}$

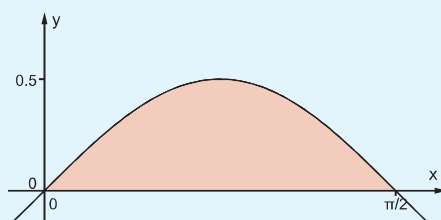
31 $x=0$ ، $y=1$ ، $y=x$ **32** $y=x+3$ ، $y=x^2+1$

33 تەواوکاری بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی قەبارەی ئەو تەنەی لەئەنجامی خولانەوەی سێگۆشەی $(0,0)$ ، $(b,0)$ ، $(0,h)$ بەدەوری تەوەری x دا دروست دەبێت.

34 تەواوکاری بەکاربهێنە بۆ نووسینەوەی ڕێسای هەژمارکردنی قەبارەی قوچەکێك کە نیوەتیرەی بنکەکەی r و بەرزییەکەی h بێت.

بەرەنگاری

35 قەبارەی ئەو تەنە بدۆزەوە کە لە ئەنجامی خولانەوەی ناوچەی سنووردراو بە چەماوەی نەخشەی $f(x)=\cos x\sin x$ و تەوەری x بەدەوری تەوەری x دا دروست دەبێت.



بـەشی 5

پێداچوونەوەی بەش

لە پرسیاری 1 تاکو 4 تەواوکاری بێسنوور بدۆزەوە.

1. $\int (2x^2+x-1)dx$

2. $\int \frac{2}{\sqrt[3]{3x}}dx$

3. $\int \frac{x^3+1}{x^2}dx$

4. $\int \left(5\cos x - \frac{2}{\cos^2 x}\right)dx$

5. **خێرایی و تاوادن** فرۆکەیەك دوای بڕینی ماوەی 1350m لەسەر ڕاڕەوەکەی هەستا. فرۆکەکە لەخاڵی وەستانەوە بە تاودانێکی نەگۆڕ دەرچوو بۆ ماوەی 30 چرکە پێش هەستانی، خێراییەکەی چەندبووە لەکاتی هەستانیدا؟

6. **خێرایی و تاوادن** تۆپێك بەشاوڵی بەرەو سەرەوە هەڵدرا لەئاستی ڕووی زەوییەوە بەخێرایەیی سەرەتای کە بڕەکەی 30 m / sبوو.

   أ تۆپەکە چەند کاتی پێویستە بۆ ئەوەی بگاتە بەرزترین خاڵ؟

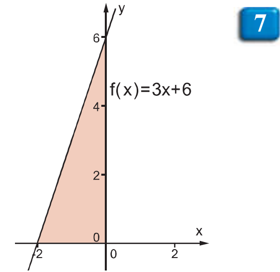
   ب بەرزی ئەم خاڵە چەندە؟

   ج کەی خێرایی تۆپەکە دەکاتە نیوەی خێراییە بنەڕەتییەکەی؟

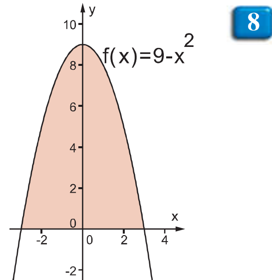
   د بەرزی تۆپەکە چەندە کاتێك خێراییەکەی دەکاتە نیوەی خێراییە بنەڕەتییەکەی؟

لە دوو پرسیاری 7 و 8 دا تەواوکاریەکی سنووردار بنووسە بۆ هەژمارکردنی ڕووبەرە سێبەرکراوەکان.

7.



8.



لە دوو پرسیاری 9 و 10 دا وێنەی ڕووبەری ئەو ناوچەی کە تەواوکارییەکە دەینوێنێت بکێشە.

9. $\int_0^5 (5-|x-5|)dx$

10. $\int_{-4}^{4} \sqrt{16-x^2}\, dx$

11. ئەمانەی خوارەوە هەژماربکە ئەگەر زانیت $\int_2^6 f(x)dx=10$ و $\int_2^6 g(x)dx=3$.

   أ $\int_2^6 [f(x)+g(x)]dx$

   ب $\int_2^6 [f(x)-g(x)]dx$

   ج $\int_2^6 [2f(x)-3g(x)]dx$

   د $\int_2^6 5f(x)dx$

12. ئەمانەی خوارەوە هەژماربکە ئەگەر زانیت $\int_0^3 f(x)dx=4$ و $\int_3^6 f(x)dx=-1$.

   أ $\int_0^6 f(x)dx$

   ب $\int_6^3 f(x)dx$

   ج $\int_4^4 f(x)dx$

   د $\int_3^6 -10f(x)dx$

لە ڕاهێنانی 13 تا 16 وێنەی ئەو ناوچەی کە تەواوکارییەکە ڕووبەرەکەی دەنوێنێت بکێشە، و ڕووبەرەکە بدۆزەوە.

13 $\int_0^3 (2x+1)dx$

14 $\int_0^1 (x-x^3)dx$

15 $\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)dx$

16 $\int_3^4 (x^2-9)dx$

لە ڕاهێنانی 17 تا 20 تەواوکارییە بێسنوورەکە بدۆزەوە.

17 $\int (x^2+1)^3 dx$

18 $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+3}} dx$

19 $\int \sin^3 x \cos x dx$

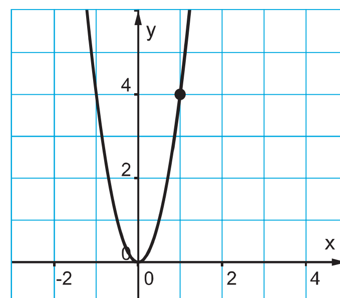
20 $\int \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}} d\theta$

21 بەهای ناوەند بۆ نەخشەی $f(x)$ لە ماوەی I بدۆزەوە.

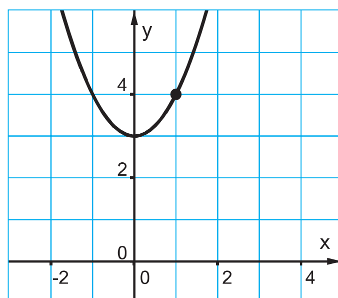
أ $f(x)=\sqrt{x}$ ؛ $I=[0,4]$

ب $f(x)=a\sqrt{x}$ ؛ $I=[0,a]$

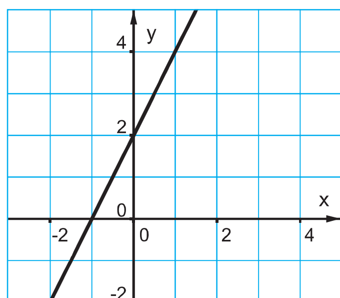
22 **بنووسە** کام لەمانەی خوارەوە ڕوونکردنەوەی نەخشەیە، کە $f'(x)=2x$ و $f(1)=4$ پاسادان دەکات.



(أ)



(ب)



(ج)

بەشی 5

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە

1 ئەگەر $\int_a^b f(x)dx = a+2b$ ئەوا بەهای $\int_a^b [f(x)+3]dx$ دەکاتە.

أ $a+2b+3$ ب $3b-3a$ ج $4a-b$

د $5b-2a$ هـ $5b-3a$

2 بەهای k چەندە کەوا دەکات $\int_2^k x^2dx = 0$.

أ -2 ب 0 ج 2

د $2\ ,-2$ هـ $0\ ,2\ ,-2$

3 کام لەمانەی خوارەوە دەکاتە ئامانجی $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$ ؟

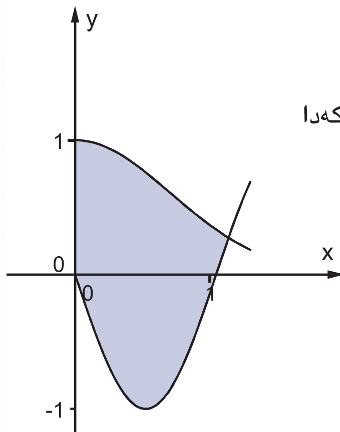
أ 0 ب 1 ج $f'(x)$

د $f(x)$ هـ جگە لەوانە

4 کام لەمانەی خوارەوە دەکاتە ڕووبەری ناوچەی سنووردراو بە ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشە $y=x^2$ و $y=-x$ و دوو ڕاستەهێڵی $x=0$ و $x=3$ برێتییە لە.

أ 2 ب $\frac{9}{2}$ ج $-\frac{9}{2}$

د 13 هـ $\frac{27}{2}$



5 R ڕووبەری ناوچەی سنووردراوە بە $y=e^{-x^2}$ و $y=-\sin 3x$ تەوەری y وەك لەوێنەکەدا دەرکەوتووە. کام لەمانە بەهای نزیکراوەیی ڕووبەری ئەو ناوچەیە دەنوێنێت؟

أ 1.139 ب 1.445 ج 1.869

د 2.114 هـ 2.340

6 کام لەمانەی خوارەوە دەکاتە ڕووبەری سنووردراو بە هەردوو چەماوەی نەخشەی $g(x)=\frac{1}{x}$ ، $f(x)=e^x$ لەلایەك هەردوو ڕاستەهێڵی $x=1$ و $x=2$ لەلایەکی تر.

أ $e^2-e-\ln 2$ ب $\ln 2-e^2+e$ ج $e^2-\frac{1}{2}$

د $2-e-\frac{1}{2}$ هـ $\frac{1}{2}-\ln 2$

بەشی

6

بڕگە قوچەکییەکان Conics

بەشی شەشەم

وانەکان

هەسارەکانی کۆمەڵەی خۆر بەدەوری خۆردا دەخوولێنەوە لە چەندەها خولگە کە شێوەی بڕگەی ناتەواو وەردەگرن و ڕۆژ دەوری تیشکۆ دەبینێت. زۆربەی ئەو خولگانە نیمچە بازنەیین، خولگەی پلۆتۆ Pluto بازنەییەکەی لەوانی تر کەمترە هەروەها (عەتارد) mercury، هەندێك خولگە هەن، شێوەی بڕگەی ناتەواوی درێژن، وەك خولگەی ئەستێرەی بچووك (ئیکار) Icarus کە ئەستێرەیەکی بچووکە پانییەکەی کەمێك زیاترە لە1,5 km و لەماوەی 409 ڕۆژ جارێك بەدەوری ڕۆژدا دەخولێتەوە.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

1 هەر دەستەواژەیەك لەستوونی لای ڕاست ببەستەوە بە لێکدانەوەکەی لە ستوونی لای چەپ.

1. بازنە
2. برگەی هاوتا
3. لەتکەری گۆشە
4. دەرکەناری ئاسۆیی

أ. ڕاستەهێڵێکە گۆشە بەشدەکات بۆ دوو گۆشەی جووت بوو.

ب. ڕاستەهێڵێکە بازنە دەکاتە دوو کەرتی جووت بوو.

ج. کۆ مەڵە خاڵێکی ڕووتەختێکە هەمان دووریان لە خاڵێکی دیاریکراو هەیە.

د. ڕوونکردنەوەی نەخشەی دووجا.

هـ. ڕاستەهێڵێکی ئاسۆییە ڕوونکردنەوەی نەخشە لێی نزیك دەبێتەوە کاتێك x نزیك دەبێتەوە لە$\pm\infty$.

بازنە

لە ڕاهێنانی 2 تا 5 چەقی بازنەو نیوەتیرەکەی دیاریبکە.

2 $x^2+y^2=49$

3 $x^2+(y+1)^2=25$

4 $(x-5)^2+y^2=15$

5 $(x-2)^2+(y+3)^2=36$

لە ڕاهێنانی 6 تا 9 هاوکێشەی بازنەکە بدۆزەوە.

6 چەق: $(0, 3)$ ، نیوەتیرە $\sqrt{5}$.

7 چەق: $(0, 0)$، نیوەتیرە 8.

8 چەق: $(5, 0)$، نیوەتیرە 13

9 چەق: $(5, -3)$ ، نیوەتیرە $\sqrt{2}$.

یاسای دووری

لە ڕاهێنانی 10 تا 12 دووری نێوان دوو خاڵەکە بدۆزەوە.

10 $(0, 2)$ و $(4, 5)$.

11 $(3,-5)$ و $(-2,-10)$.

12 $(-5, 1)$ و $(3, 6)$.

لە ڕاهێنانی 13 تا 16 دووری نێوان خاڵەکەو ڕاستەهێڵەکە بدۆزەوە.

13 خاڵی: $(3, 5)$ ، ڕاستەهێڵی $y=-5$.

14 خاڵی: $(-7, -9)$، ڕاستەهێڵی $x=2$.

15 خاڵی: $(3, 3)$ ، ڕاستەهێڵی $x+y=1$.

16 خاڵی: $(-2, 3)$ ، ڕاستەهێڵی $y=-2x+5$.

تەواوکردنی دووجا

لە ڕاهێنانی 17 تا 20 برە جەبرییەکە تەواوبکە بۆ ئەوەی ببێتە دووجای تەواو:

17 $3x^2+6x$

18 $5y^2+20y$

19 x^2+x

20 y^2-3y

1-6 برگە قوچەکییەکان
Conic Sections

ڕێڕەوی هەسارەکان و مانگەکان و تەنەکانی تر (هەتا ئەلیکترۆنەکانیش) برگە قوچەکییەکان پێکدەهێنن، کە جووڵەیان دیاریدەکرێت بەهێزێك پێچەوانە هاوڕێژەیە لەگەڵ دووجای دوورییەکەیان ، لەکاتێدا زانیت ڕێڕەوی تەنێکی جولاو برگەیەکی قووچەکی دیاریکراوە تا زانیارییەکانت دەربارەی خێرایی و ئەو هێزەی تەنەکە دەجولێنێت دەست نەکەوێت.
لەم بەشەدا فێری بەیەکتربەستنی نێوان برگە قوچەکییەکان و هاوکێشە دووجایەکانی دوو گۆڕاو دەبێت. هەروەها فێری پۆلینکردنی برگە قوچەکییەکان دەبێت بەپێی جیاوازی چەقەکانیان Eccentricity.

ئامانجەکان

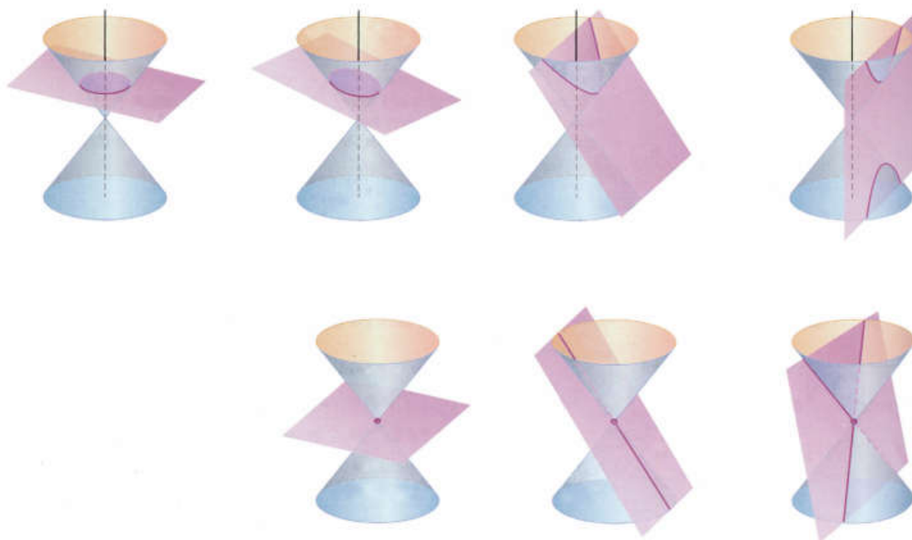
- برگە قوچەکییەکان پێناسە دەکات.
- هاوکێشەی برگەی هاوتا دەنووسێت و پێکهاتەکانی دیاریدەکات.
- هاوکێشەی برگەی ناتەواو دەنووسێت و پێکهاتەکانی دیاریدەکات.
- هاوکێشەی برگەی زیاد دەنووسێت و پێکهاتەکانی دیاریدەکات.
- وێنەی برگە قوچەکییەکان دەکێشێت.

زاراوەکان
Vocabulary

Parabola	برگەی هاوتا
Ellipse	برگەی ناتەواو
Hyperbole	برگەی زیاد
Focus	تیشکۆ
Directrix	دەلیل
Vertex	سەر
Focal axis	تەوەری تیشکۆیی
Major axis	تەوەری گەورە
Minor axis	تەوەری بچووك
Real axis	تەوەری ڕاستی
Cojugate axis	تەوەری ئاوەڵ

برگە قوچەکییەکان

زانا گریکەکان لەسەردەمی ئەفلاتوندا برگە قوچەکییەکانیان بەو هێڵە چەماوانەی کە لە ئەنجامی برینی قوچەکێکی دووانی بە ڕووتەختێك پەیدادەبێت پێناسەکردووە. بەڵام ئێستا زانایەکانی بیرکاری برگە قووچەکییەکان بە بەکارهێنانی یاسای دووری لە ڕووتەختی پۆوتانەکان پێناسەدەکەن.



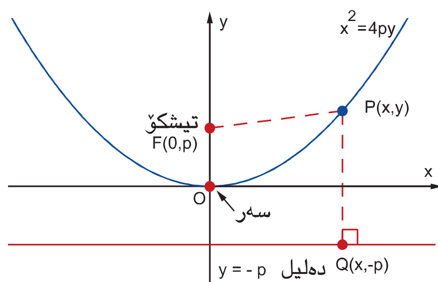
زۆر ڕێگا هەیە بۆ پێناسەکردنی برگە قوچەکییەکان. دەتوانیت وا پێناسەی بکەیت، کە لە ئەنجامی برینی قوچەکێکی دووانی بە ڕووتەختێك دروست دەبێت، وەك ئەوەی گریکەکان کردیان ودەتوانیت بەشێوەی جەبری پێناسەی بکەیت، کە بریتییە لە نواندنی ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی پلە دووی دوو گۆڕاو.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

هەروەها دەتوانیت بەم شێوەیە پێناسەی بکەیت، بریتییە لە کۆمەڵە خاڵێك لە ڕووتەختێکدا کە پاسادانی مەرجێکی ئەندازەیی دیاریکراو دەکات. ئاسانترین نموونەی ئەم ڕێگایە پێناسەی بازنەیە، کە بریتییە لە کۆمەڵە خاڵێك لە ڕووتەختێکدا، هەمان دوورییان هەیە لە خاڵێکی دیاریکراو.

برگەی هاوتا

لە پۆلی دە فێربوویت کە ڕوونکردنەوەی نەخشەیەکی دووجا برگەیەکی هاوتایە، لەم وانەیەدا سیفەتێکی بنەڕەتی فێردەبیت بۆ ئەوەی پێناسەیەکی ئەندازەیی برگەکە بکەیت. برگەی هاوتا یەکێکە لە برگە قوچەکییە بنەڕەتییەکان و سیفەتی وێنەدانەوەی هەیە کە وای لێدەکات بواری بەکارهێنانی فراوانبێت.



برگەی هاوتا Parabola

برگەی هاوتا: کۆمەڵە خاڵێکە لە ڕووتەختێکدا کە هەمان دووریيان هەیە لە خاڵێکی دیاریکراو (پێی دەوترێت تیشکۆ) و لە ڕاستەهێڵێك کە پێیدا ناڕوات (پێی دەوترێت دەلیل). خاڵی ناوەڕاستی نێوان تیشکۆو دەلیل پێی دەوترێت سەری برگە، بەڵام ئەو ڕاستەهێڵەی بە تیشکۆو سەری برگەکەدا دەڕوات پێی دەوترێت تەوەری برگەی هاوتا. بە ڕوانینت بۆ وێنەکەی سەرەوە کە برگەیەکی هاوتا دەردەخات، بۆت دەردەکەوێت کە هاوجێیە لەگەڵ تەوەرەکەی کە دەبێتە تەوەری هاوجێ.

ئەگەر سەری برگە هاوتایەکە خاڵی (h, k) بێت و هاوکێشەی دەلیلەکەی $y = k - p$ بێت، ئەوا پۆوتانی تیشکۆیەکەی دەکاتە $(h, k+p)$، دووری نێوان خاڵی $P(x, y)$ و تیشکۆ دەکاتە $\sqrt{(x-h)^2+(y-(k+p))^2}$ و دووری نێوان P و دەلیل دەکاتە $\sqrt{(y-(k-p))^2}$.

ئەگەر P دانەی برگەی هاوتایەکە بێت ئەوا:

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-(k+p))^2} = \sqrt{(y-(k-p))^2}$$

$$(x-h)^2+(y-(k+p))^2 = (y-(k-p))^2$$

$$(x-h)^2+y^2-2y(k+p)+(k+p)^2 = y^2-2y(k-p)+(k-p)^2$$

$$(x-h)^2+2y(k-p)-2y(k+p)+(k+p)^2-(k-p)^2 = 0$$

$$(x-h)^2-4(y-k)p = 0$$

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

لەبەرامبەردا دەتوانیت بیسەلمێنیت کە خاڵی $P(x, y)$ پاسادانی پەیوەندی $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ دەکات و دەکەوێتە سەر ئەو برگە هاوتایەی سەرەکەی (h, k) و دەلیلەکەی $y = k - p$ بێت.

هاوکێشەی برگە هاوتا

شێوەی گشتی: هاوکێشەی برگەی هاوتا کە سەرەکەی (h, k) و دەلیلەکەی ڕاستەهێڵی $y = k - p$ بێت دەکاتە $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ لەو بارەدا تەوەری برگەکە دەبێتە ڕاستەهێڵی ستوونی $x = h$ و تیشکۆیەکەی خاڵی $(h, k+p)$یە، بەڵام ئەگەر سەرەکەی (h, k)و هاوکێشەی دەلیلەکەی $x = h - p$ شێوەی گشتی هاوکێشەکەی دەبێتە $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ لەم بارەدا تەوەری برگەکە ڕاستەهێڵیئاسۆیی $y = k$ و تیشکۆیەکەی خاڵی $(h+p, k)$ دەبێت.

نموونـــه 1 دۆزینەوەی پێکهاتەکانی بڕگەی هاوتا

پێکهاتەکانی بڕگە هاوتای $y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$ بدۆزەوە (تیشکۆ و سەر و دەلیل و تەوەرەکەی)

شیکار

سەرەتا هاوکێشەی بڕگە هاوتایەکە بەشێوەی گشتی بە بەکارهێنانی تەواوکردنی دووجا بنووسە.

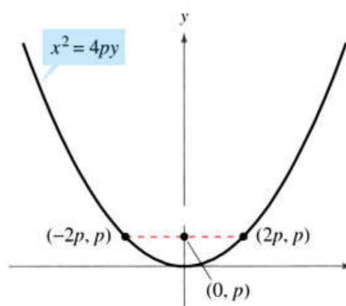
$$y=-\tfrac{1}{2}x^2-x+\tfrac{1}{2}\Rightarrow y=-\tfrac{1}{2}\left(x^2+2x+1\right)+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\Rightarrow (x+1)^2=-2(y-1)$$

بە بەراوردکردن لەگەڵ شێوە گشتییەکەی کە تەوەری ستوونی هەیە دەردەچێت $p=\frac{-1}{2}, k=1, h=-1$ لەمەوە بۆمان دەردەچێت کە تیشکۆی بڕگەکە بریتییە لە خاڵی $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)=(h,\ k+p)$ و خاڵی سەری بڕگەکە $(h,\ k)=(-1,\ 1)$ و هاوکێشەی دەلیلەکەی ڕاستەهێڵی $y=k-p=1.5$ و تەوەرەکەی ڕاستەهێڵی $x=h=-1$.

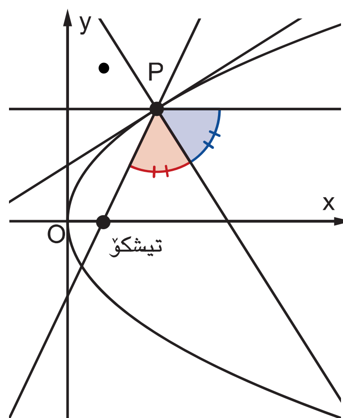


1. پێکهاتەکانی ئەم بڕگە هاوتایە بدۆزەوە. $2x+y^2+2y-1=0$

یەکێك لە سیفەتەکانی بڕگەی هاوتا کە زۆر بەکاردێت، (**سیفەتی تیشکدانەوەیە**) زانا فیزیاییەکان بە ڕوویەك دەڵێن **تیشکدەرەوە** ئەگەر ئەو گۆشەی پێکدێت بە تیشکی بەرکەوتووی ڕووەکە و لێکەوتەکەی لە خاڵی بەرکەوتندا جووت دەبێت لەگەڵ ئەو گۆشەیەی تیشکەکە دروستیدەکات پاش تیشکدانەوەی لەگەڵ لێکەوتەکەی. یەکەم گۆشە پێی دەوترێت گۆشەی بەرکەوتن و بەگۆشەی دووەم دەوترێت **گۆشەی تیشکدانەوە**، ڕووی ئاوێنەکانی ماڵەوە ساکارترین نموونەیە لە ڕووە تیشکدەرەکان.



چەند جۆرێکی تر لە ڕووە تیشکدەرەوەکان هەیە وەك سێڵەکانی (صحون) وەرگرتنی پەخشی تەلەفزیۆنی لە مانگە دەستکردەکان کە لە ئەنجامی سوڕانەوەی بڕگەیەکی هاوتا بە دەوری تەوەری ئەم ڕووانە دروست دەبن، ئەم ڕووە تیشکدەرانە سیفەتێکی گرینگیان هەیە، کە تیشکە بەرکەوتووەکان بەشێوەی تەریب بە تەوەرەکەی وەردەگرێت و دەیداتەوە بەو جۆرەی کە بە تیشکۆی بڕگەکەدا بڕوات. هەروەها هەموو ئەو تیشکانەی کە تیشکۆ پەخشی دەکاتەوە بە ئاڕاستەی ڕووەکە تیشکی تەریب بە تەوەری بڕگە هاوتایەکە تیشکدەداتەوە.

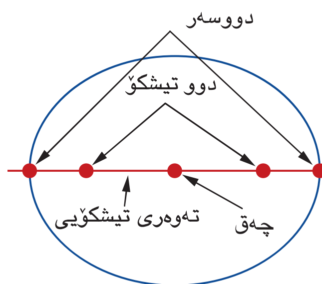


سیفەتی تیشکدانەوەی بڕگەی هاوتا

ئەستوونی سەر لێکەوتی بڕگەی هاوتا لە خاڵی P کە یەکێکە لە خاڵەکانی دەبێتە لەتکەری ئەو گۆشەی کە دروست دەبێت لەنێوان ئەو ڕاستەهێڵەی کە بە خاڵەکەو تیشکۆدا دەڕوات لەگەڵ ڕاستەهێڵێکی تەریب بە تەوەرەکەی کە بە P دا دەڕوات.

برگەی ناتەواو

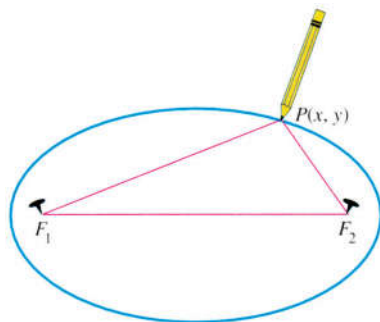
زانای پۆلۆنی (نیكۆلاس كۆپەرنیكس) Nicolas Copernics دەریخست كە هەسارەكان (لەناویاندا زەوی) بەدەوری خۆردا دەخولێنەوە لە چەندەها خولگەی بازنەییدا كە خۆر چەقەكەیەتی، بەڵام زانای ئەڵمانی یۆهانس كیپلر Johannes Kepler بیردۆزەكەی كۆپرنیكسی ڕاستكردەوە و ڕوونیكردەوە كە هەسارەكان بەدەوری خۆردا دەخولێنەوە بە چەندەها خولگە كە لە شێوەی برگەی ناتەواوە (Ellipse) و خۆر دەبێتە یەكێك لە تیشكۆكانی. یەكێك لە بەكارهێنانەكانی برگەی ناتەواو ڕوونكردنەوەی جوڵانەوەی هەسارەكانە. بۆ ناسینی برگەی ناتەواو لە ڕێگای پێناسەكەیەوە دەستپێدەكەین وەك لە برگەی هاوتا كردمان كە كۆمەڵە خاڵێكە لە ڕووتەختێكدا بە مەرجێكی دیاریكراو، بۆ پێناسەكردنی برگەی ناتەواو دوو تیشكۆ باس دەكەین لەجیاتی یەك تیشكۆ وەك لە برگەی هاوتا هاتبوو.



برگەی ناتەواو
برگەی ناتەواو: كۆمەڵە خاڵێكە لە ڕووتەختێكدا كە سەرجەمی دوورییان لە دوو خاڵی دیاریكراو(تیشكۆ) دەكاتە بەهایەكی نەگۆڕ. بەم دوو خاڵە دەوترێت دوو **تیشكۆی** برگە ناتەواوەكە، ئەو ڕاستەهێڵەی كە دوو تیشكۆیەكەی لەسەرە پێی دەوترێت تەوەری تیشكۆیی یان **تەوەری گەورە** كە دەكەوێتە نێوان هەردوو سەری برگەكە، و ناوەڕاستی ئەم تەوەرەیە دەبێتە چەقی برگەكە و ڕاستەهێڵی ئەستوون لەسەر تەوەری تیشكۆیی لە چەقەكەیدا كە برگەكە دەبڕێت لە دوو خاڵ پێی دەوترێت دوو سەری بچووك، ئەو ڕاستەهێڵەی دوو سەرە بچووكەكە بەیەك دەگەیەنێت پێی دەوترێت (**تەوەرەی بچووك**)ی برگەی ناتەواو.

لەبیرت بێت

a و b و c بە پەیوەندی
$c^2 = a^2 + b^2$
دەبەسترێنەوە بەپێی
سەڵمێنراوی فیساگۆرس.



ئاسانترین ڕێگا بۆ وێنەكێشانی برگەی ناتەواو بە زانینی دوو تیشكۆیەكەی بەكارهێنانی پێناسەكەیەتی. داوێك بگرە بەدەستەوە كە درێژییەكەی بكاتە سەرجەمی دوو دووری خاڵێكی سەر برگەكە لە دوو تیشكۆكانیەوە و هەردوو سەری داوەكە لە دوو تیشكۆكەی F_1 و F_2 گیربكە. دوای ئەوە قەڵەمێك لەداوەكە ببەستەوە بیجوڵێنە وێنەیەكت دەست دەكەوێت كە بریتییە لە كۆمەڵە خاڵێك كە سەرجەمی دوو دوورییەكانیان لە تیشكۆكانەوە یەكسانە بە درێژی داوەكە ئەمەش برگەی ناتەواوە داواكراوەكەیە.

ئەگەر دوو تیشكۆكان خاڵەكانی $F_1(-c, 0)$، $F_2(c, 0)$ بن كە $PF_1 + PF_2 = 2a$ كاتێك خاڵی $P(x, y)$ لە خاڵەكانی برگەكە بێت ئەم پەیوەندییە پاسادان دەكات.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

بۆ سادەكردنی ئەم هاوكێشەیە هەریەكێك لە ڕەگەكان لەلایەك دابنێ و هەردوو لای دووجا بكە. دوایی ئەو ڕەگەی دەمینێتەوە، لەلایەك بەتەنیا دابنێ و بۆ جاری دووەم دووجای بكە. لە كۆتاییدا ئەم هاوكێشەت دەستدەكەوێت. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$

لەلایەکی ترەوە دەتوانین تێبینی ئەمەی خوارەوە بکەین ئەگەر پۆوتانی خاڵی $P(x, y)$ پاسادانی هاوکێشەکەی پێشووی کرد ئەوا پاسادانی $PF_1 + PF_2 = 2a$ دەکات ئەوا خاڵی $P(x, y)$ دەکەوێتە سەر بڕگەی ناتەواو ئەگەر و تەنها ئەگەر پۆوتانەکەی پاسادانی هاوکێشەی سەرەوە بکات.

لەبەرئەوەی $PF_1 + PF_2 > F_1F_2$ (لاسەنگەی سێگۆشەیی سەر بە سێگۆشەی PF_1F_2) ئەوا $2a > 2c$

لەپاشدا $a > c$ لەوەوە دەردەچێت کە $a^2 - c^2$ ژمارەیەکی موجەبە، ئەگەر واماندانا b ڕەگی دووجای $a^2 - c^2$ هاوکێشەکە دەبێت. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ئەمەش **شێوەی سادەی** هاوکێشەی بڕگەی ناتەواوە کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە. لەو هاوکێشەدا دەردەکەوێت کە بڕگەی ناتەواو هاوجێیە لەگەڵ هەردوو تەوەرەکان و خاڵی بنەڕەت و دەکەوێتە ناو لاکێشەیەك سنووردراوە بەم ڕاستەهێڵانە $x = -a$ ، $x = a$ ، $y = -b$ ، $y = b$ کە لێکەوتن بۆ بڕگەکە لە 4 خاڵدا کە ئەمانەن.

- هەردوو سەری بڕگە $(-a, 0)$، $(a, 0)$.
- هەردوو سەری بچووك $(0, -b)$، $(0, b)$

لە کۆتاییدا لێکەوتەکانی بڕگە قوچەکییەکە لەو خاڵانەی سەرەوە لەگەڵ تەوەری پۆوتانەکان ئەستوونە، بەڵام ئەگەر چەقی بڕگەکە خاڵی بنەڕەت نەبێت ئەوا شێوەی هاوکێشەی بڕگە ناتەواوەکە بەم شێوەیە دەبێت.

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئاسۆیی بێت و بەم شێوەیە بێت:

$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئەستوونی بێت. لێرەدا $a > b$ هەموو کات لەبیرت بێت پۆوتانی چەق لەم بارەدا خاڵی (h, k) دەبێت.

هاوکێشەی بڕگەی ناتەواو

شێوەی گشتی هاوکێشەی بڕگە ناتەواو بریتییە لە :

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ کاتێك تەوەری تیشکۆیی ئاسۆیی بێت.

$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ کاتێك تەوەری تیشکۆیی ستوونی بێت.

لەو هاوکێشەیەدا a نیوەی تەوەری گەورەیە و b نیوەی تەوەری بچووکە و (h, k) چەقە.

پێکهاتەکانی بڕگەی ناتەواو:

- دووری نێوان تیشکۆ و چەق: c
- سەرەکان $(h \pm c, k)$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئاسۆیی بێت و $(h, k \pm a)$ ئەگەر ئەستوونی بێت.
- دوو سەرە بچووکەکە $(h, k \pm b)$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئاسۆیی بێت و $(h \pm b, k)$ ئەگەر ئەستوونی بێت.
- دوو تیشکۆیەکان $(h \pm c, k)$ ئەگەر تەوەری تیشکۆی ئاسۆیی بێت و $(h, k \pm c)$ ئەگەر ئەستوونی بێت.

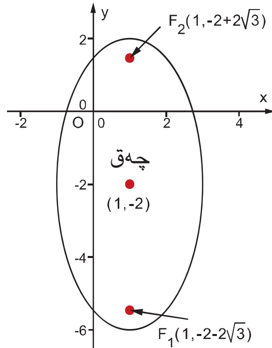
نموونــــە 2

دۆزینەوەی پێکهاتەکانی بڕگەی ناتەواو

پێکهاتەکانی بڕگە ناتەواوی $4x^2+y^2-8x+4y-8=0$ بدۆزەوە.

شیکار

هاوکێشەی بڕگە ناتەواوەکە بگۆڕە بۆ شێوەی گشتی بە تەواوکردنی دووجا بۆ x و y



$$4x^2+y^2-8x+4y-8=0$$
$$4x^2-8x+y^2+4y=8$$
$$4(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=8+4+4$$
$$4(x-1)^2+(y+2)^2=16$$
$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$$

لەم هاوکێشەیە دەردەچێت کە:

$a^2=16$ ، $b^2=4$ ، $c^2=a^2-b^2=12$ ، $h=1$ ، $k=-2$.

ناوەڕاستی تەوەری گەورە $a=\sqrt{16}=4$ ناوەڕاستی تەوەری بچووک $b=\sqrt{4}=2$

چەق $(h,k)=(1,-2)$ دووری نێوان تیشکۆ و چەق $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

دوو تیشکۆ: $(h,k\pm c)=(1,-2\pm2\sqrt{3})$

دوو سەری تەوەری بچووک: $(h\pm b,k)=(1\pm2,-2)=\begin{cases}(3,-2)\\(-1,-2)\end{cases}$

دوو سەری تەوەری گەورە: $(h,k\pm a)=(1,-2\pm4)=\begin{cases}(1,2)\\(1,-6)\end{cases}$



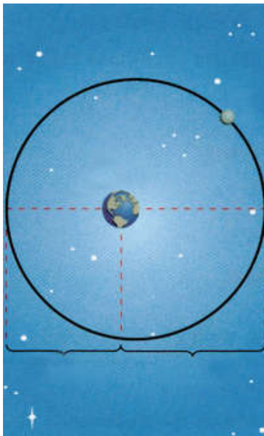
2. پێکهاتەکانی بڕگە ناتەواوی $2x^2+3y^2+4x+6y-1=0$ بدۆزەوە.

لەبیرنەکەی
$a>b$

نموونــــە 3

خولگەی مانگ

خولگەی مانگ بەدەوری زەویدا بڕگەیەکی ناتەواوە یەکێك لە تیشکۆیەکانی چەقی زەوییە درێژی تەوەری گەورەی 768 800 km ودرێژی تەوەری بچوکی767 640 km ئایا دوورترین خاڵ و نزیکترین خاڵ لەچەقی زەوییەوە چەندە کە مانگ پێیدا دەڕوات.



شیکار

بەهای a و b بدۆزەوە.

$$2a=768\,800\Rightarrow a=384\,400$$
$$2b=767\,640\Rightarrow b=383820$$

هەژماری بەهای c بکە $c=\sqrt{a^2-b^2}\approx21108$

دوورترین خاڵ کە مانگ پێیدا دەڕوات $a+c\approx405\,508$ km لە چەقی زەوییەوە.

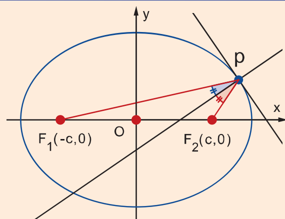
نزیکترین خاڵ لە مانگ پێیدا دەڕوات $a-c\approx363292$ km دوورە لە چەقی زەوییەوە.



3. دووری تیشکۆی دووەمی خولگەی مانگ لە چەقی زەوییەوە چەندە؟

سیفەتی تیشکدانەوەی بڕگەی ناتەواو

ئەستوونی سەر لێکەوتی بڕگەی ناتەواو لە خاڵی P کە یەکێك لە خاڵەکانی بڕگەکەیە دەبێتە لەتکەری ئەو گۆشەی پێکدێت بەو دوو ڕاستەهێڵەی کە بەو خاڵەدا و بە دوو تیشکۆیەکەیدا دەڕۆن.

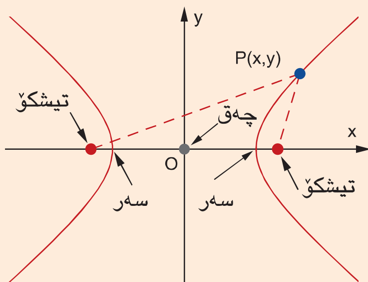


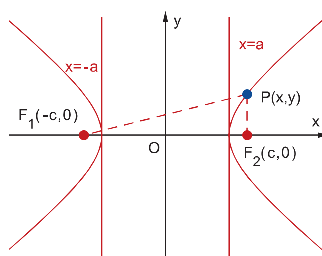
بڕگەی زیاد Hyperbola

پێناسەی بڕگەی زیاد لە پێناسەی بڕگەی ناتەواو دەچێت. بڕگەی ناتەواو بریتییە لە کۆمەڵە خاڵێك لە ڕووتەختێکدا کە سەرجەمی دوو دوورییەکەیان لە دوو خاڵی دیاریکراو بڕێکی نەگۆڕە، هەروەها بڕگەی زیاد بریتییە لە کۆمەڵە خاڵێك لە ڕووتەختێکدا کە بەهای ڕووتی جیاوازی نێوان دوورییەکانیان لە دوو خاڵی دیاریکراو بڕێکی نەگۆڕە.

بڕگەی زیاد

بڕگەی زیاد: کۆمەڵە خاڵێکە لە ڕووتەختێکدا کە بەهای ڕووتی جیاوازی دوو دوورییەکانیان لە دوو خاڵی دیاریکراو بڕێکی نەگۆڕە. هەریەك لەم دوو خاڵە پێی دەوترێت **تیشکۆ** بەو ڕاستەهێڵەی پێیاندا دەڕوات دەوترێت تەوەری تیشکۆیی و بەو ڕاستەهێڵەی هەردوو سەری بڕگەکە دەگەینێت پێی دەوترێت **تەوەری ڕاستی** و ناوەڕاستەکەی دەبێتە چەقی بڕگە زیادەکە، ئەو ڕاستەهێڵەی ئەستوونە لەسەر تەوەری تیشکۆیی پێی دەوترێت **تەوەری ئاوەڵ** (خەیاڵی)، بڕگەی زیاد بەوە لە هەردوو بڕگەی ناتەواو و هاوتا جیادەکرێتەوە کە پێکدێت لە دوو لقی هاوجێ بەپێی چەقەکەی و تەوەری ئاوەڵەکەی.





ئەگەر دوو تیشکۆی بڕگەکە بریتی بێت لە دوو خاڵی $F_1(-c\,,\,0)$ و $F_2(c\,,\,0)$ $|PF_1-PF_2|=2a$ ئەوا خاڵی $P(x\,,\,y)$ پاسادانی ئەو پەیوەندییەی خوارەوە دەکات.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

بەسادەکردنی ئەو هاوکێشەیە ودانانی هەریەك لە ڕەگەکان لەلایەك بەجیا و بەدووجاکردنی هاوکێشەکە پاشان ئەو ڕەگەی دەمێنێتەوە لەلایەك بەتەنها دایبنێ و دووبارە دووجای هاوکێشەکە بکە ئەمەی خوارەوەت دەستدەکەوێت.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

ئەم هاوکێشەیە لە هاوکێشەی بڕگەی ناتەواو دەچێت بەڵام $a<c$ چونکە $2a$ کەمترە لە $2c$ چونکە جیاوازی نێوان دوو لای سێگۆشەی PF_1F_2 دەنوێنێت، لەلایەکی ترەوە دەتوانیت دەریبخەی ئەگەر خاڵی $P(x\,,\,y)$ پاسادانی هاوکێشەکەی پێشوو بکات لەگەڵ $0<a<c$ ئەوا پاسادانی $|PF_1-PF_2|=2a$ دەکات. ئەگەر b ناوبنێن ڕەگی دووجای مووجەبی c^2-a^2 ئەوا $c^2-a^2=b^2$ هاوکێشەکە دەبێتە $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ئەوەش هاوکێشەی بڕگەی زیادە بە **شێوەی سادە**.

ئەگەر بەراوردی نێوان دوو هاوکێشەی سادەی بڕگەی ناتەواو و زیادبکەین دەردەکەوێت کە لەیەکتر دەچن، تەنها لە دوو شت نەبێت

(یەکەم) هاوکێشەی بڕگەی ناتەواو نیشانەی کۆکردنەوە + لەخۆدەگرێت، بەڵام هاوکێشەی بڕگەی زیاد نیشانەی لێدەرکردن - لەخۆدەگرێت.

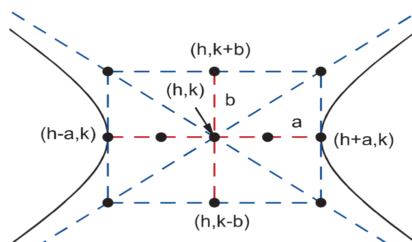
(دووەم) $c^2 = a^2 + b^2$ لە هاوکێشەی بڕگەی ناتەواو، بەڵام $c^2 = a^2 - b^2$ لەهاوکێشەی بڕگەی زیاد.

لەهاوکێشەی بڕگەی زیاددا دەردەکەوێت کە بڕگەی زیاد هاوجێیە لەگەڵ هەردوو تەوەری پۆوتانەکان کە بریتین لە تەوەری تیشکۆ و تەوەری ئاوەڵ و هاوجێیە لەگەڵ خاڵی بنەڕەت. بڕگەی زیاد تەوەری x لە دوو خاڵی $(-a\,,0)$ و $(a\,,0)$ دەبڕێت کە دەبنە سەری بڕگەکە، لە کۆتاییدا دوو لێکەوتی بڕگەی زیاد لە سەرەکانیدا بریتییە لەو دوو ڕاستەهێڵەی ئەستوونن لەگەڵ تەوەری تیشکۆیی، بەڵام کاتێك چەقی بڕگەکە خاڵی بنەڕەت نەبێت، ئەوا هاوکێشەکەی ئەم شێوەی خوارەوە وەردەگرێت.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئاسۆیی بێت.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئەستوونی بێت.

کاتێك خاڵی $(h\,,k)$ چەقی بڕگە زیادەکە بێت.



دوو هێڵە دەرکەنارەکان

لە بڕگەی زیاددا دوو هێڵی دەرکەناری هەیە کە بریتیین لە $y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$ کاتێك تەوەری تیشکۆیی ئاسۆیی بێت و $y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$ کاتێك تەوەری تیشکۆیی ئەستوونی بێت. دوو هێڵە دەرکەنارەکە یارمەتیدەرن بۆ وێنەکێشانی بڕگە زیادەکە و هەروەها یارمەتیدەرن بۆ ئەوەی بزانیت کە هەردوو دەرکەنارەکە لە چەقدا یەکتردەبڕن و دەبنە دوو تیرەی ئەو لاکێشەی کە چەقەکەی هەمان چەقی بڕگە زیادەکەیە و دووریيەکانیان $2a$ و $2b$ دەبن.

هاوکێشەی بڕگەی زیاد

شێوەی گشتی هاوکێشەی بڕگەی زیاد:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئاسۆیی بێت.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئەستوونی بێت.

لەم هاوکێشەیەدا $(h\,,k)$ چەقی بڕگە زیادەکەیەو a نیوەی تەوەری ڕاستیە و $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ بریتییە لە دووری نێوان چەق و تیشکۆ.

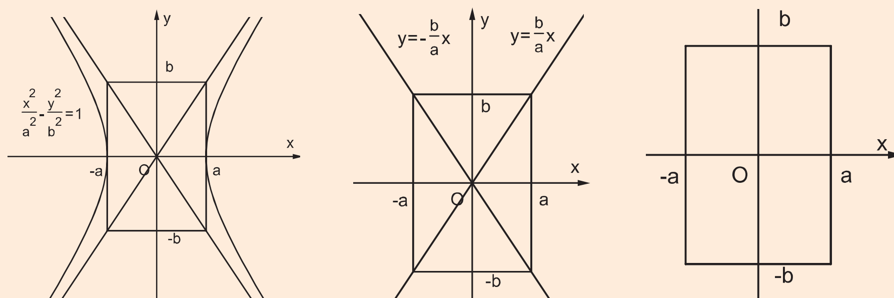
پێکهاتەکانی تری بڕگەی زیاد ئەمانەن:

- سەرەکان: $(h \pm a\,,k)$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئاسۆیی بێت و $(h\,,k \pm a)$ ئەگەر ئەستوونی بێت.
- تیشکۆکان: $(h \pm c\,,k)$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئاسۆیی بێت و $(h\,,k \pm c)$ ئەگەر ئەستوونی بێت.
- دەرکەنارەکان: $y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئاسۆیی بێت و $y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$ ئەگەر ئەستوونی بێت.

لاكێشەی $2a \times 2b$ كە چەقەكەی خاڵی بنەڕەتە یارمەتیدەرە بۆ وێنەكێشانی بڕگەی ناتەواوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ و بڕگەی زیادی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ تێبینی ئەوەت كرد كە بڕگەی ناتەواو بەتەواوی دەكەوێتە ناو لاكێشەكە، بەڵام بڕگەی زیاد بەتەواوی دەكەوێتە دەرەوەی لاكێشەكە. چونكە هاوكێشەی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ دەردەچێت $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$ لەمەش $x \geqslant +a$ یان $x \leqslant -a$ تێبینی بكە هەردوو بڕگەكە دوو لێكەوتیان لە دوو سەرەكانیاندا هەیە، كە دوولای بەرامبەر یەكترن لە لاكێشەكەدا.

چۆن وێنەی بڕگە زیاد دەكێشیت

1. خاڵەكانی $(\pm a, 0)$ و $(0, \pm b)$ دیاریبكە و لاكێشەی سنووردراو بەو خاڵانە وێنە بكێشە.
2. دوو هێڵە دەركەنارەكانیان بە درێژكردنەوەی دوو تیرەی لاكێشەكە بكێشە.
3. لاكێشەكەو هێڵە دەركەنارەكان بەكاربهێنە وەك یارمەتیدەرێك بۆ كێشانی بڕگەكە.



نموونـــــە 4

دوو دەركەنارەكان بەكاربهێنە بۆ وێنەكێشانی بڕگەی زیاد

وێنەی بڕگەی زیادی $4x^2 - y^2 = 16$ بكێشە.

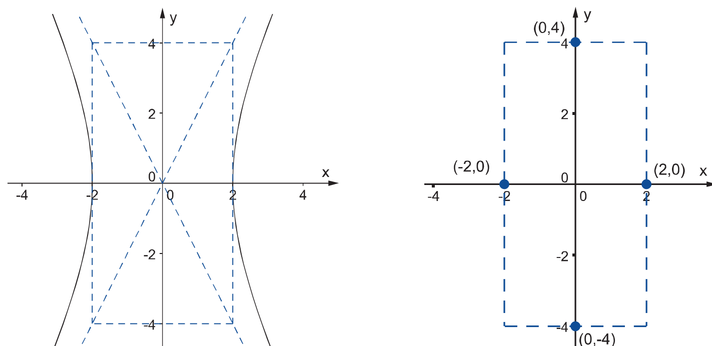
شیكار

سەرەتا هاوكێشەی بڕگە زیادەكە بەشێوەی گشتی بنووسە.

$$4x^2 - y^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

لەمەوە بۆمان دەردەچێت كە تەوەری تیشكۆیی ئاسۆییە و چەقی بڕگەكە خاڵی بنەڕەتە. دوو دووری لاكێشەكە بریتین لە $2a = 4$ و $2b = 8$.

ئێستا لاكێشەكە دروست بكە.



دوو تیرەی لاكێشەكە بكێشەو درێژیانبكەوە تا دوو هێڵە دەركەنارەكانی بڕگەكەت دەست بكەوێت. ئێستا دەتوانیت وێنەی بڕگە زیادەكە بەشێوەیەكی گونجاو بكێشیت.

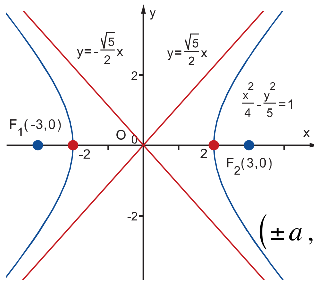


4. وێنەی بڕگەی زیادی $y^2 - 4x^2 = 16$ بكێشە.

دەتوانیت پێکهاتەکانی بڕگەی زیادبە بەکارهێنانی هاوکێشەی بڕگەکە بدۆزێتەوە کە بریتیین لە دووسەر و دوو تیشکۆ و دوو هێڵە دەرکەنارەکان پێش ئەمانە پێویستە بزانیت تەوەری تیشکۆیی ئاسۆییە یان ستوونییە.

نموونـــە 5

دۆزینەوەی پێکهاتەکانی بڕگەی زیاد، تیشکۆیەکانی لەسەر تەوەری x بێت



پێکهاتەکانی بڕگەی زیادی $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ بدۆزەوە.

شیکار

$c^2=a^2+b^2=9$ ، $b^2=5$ ، $a^2=4$

دووری نێوان چەق و تیشکۆ $c=3$

دوو تیشکۆیەکە $(\pm c,0)=(\pm 3,0)$ دوو سەرەکان $(\pm a,0)=(\pm 2,0)$

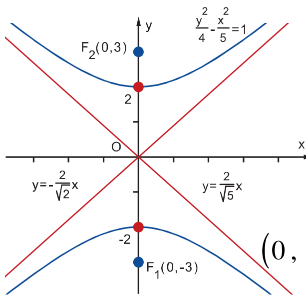
دوو هێڵە دەرکەنارەکان $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$ چەق: $(0,0)$



5. پێکهاتەکانی بڕگەی زیادی $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ بدۆزەوە.

نموونـــە 6

دۆزینەوەی پێکهاتەکانی بڕگەی زیاد، تیشکۆکانی لەسەر تەوەری y بێت.



پێکهاتەکانی ئەم بڕگە زیادە بدۆزەوە $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$

شیکار

$c^2=a^2+b^2=9$ ، $b^2=5$ ، $a^2=4$

دووری نێوان چەق و تیشکۆ $c=3$

دووتیشکۆیە $(0,\pm c)=(0,\pm 3)$ دوو سەرەکان $(0,\pm a)=(0,\pm 2)$

هێڵە دەرکەنارەکان $y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$ چەق: $(0,0)$



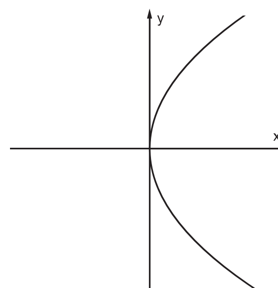
6. پێکهاتەکانی بڕگەی زیادی $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$ بدۆزەوە.

1–6 ڕاهێنان

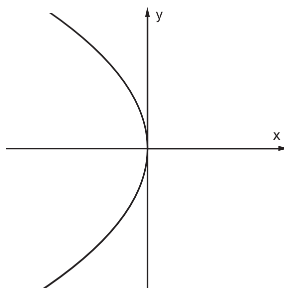
لە ڕاهێنانی 1 تا 4 بەراوردی بڕگە هاوتاکە بکە لەگەڵ ئەو هاوکێشەیەی کە دەینوێنێت.

$y^2=-4x$ ، $y^2=8x$ ، $x^2=-6y$ ، $x^2=2y$

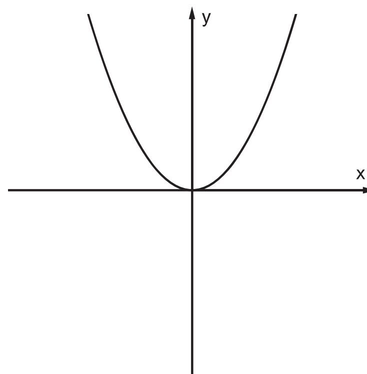
1



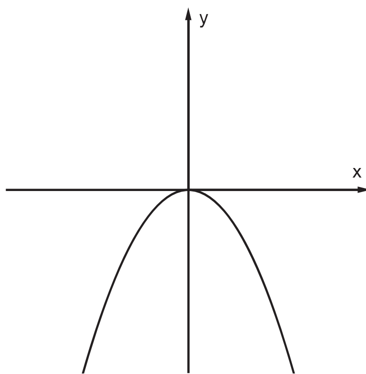
2



3



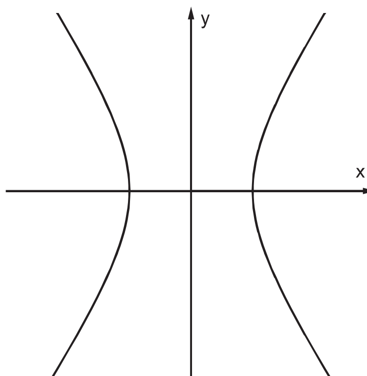
4



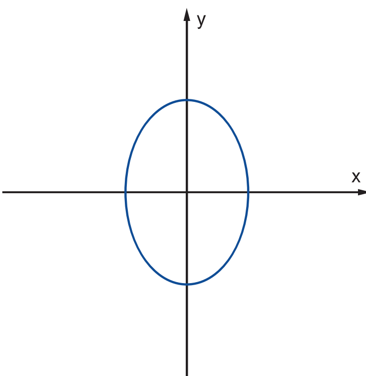
لە ڕاهێنانی 5 تا 8 برگە قوچەکییەکە بەو هاوکێشەی دەینوێنێت ببەستەوە.

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ ، $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ ، $\frac{y^2}{4}-x^2=1$ ، $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

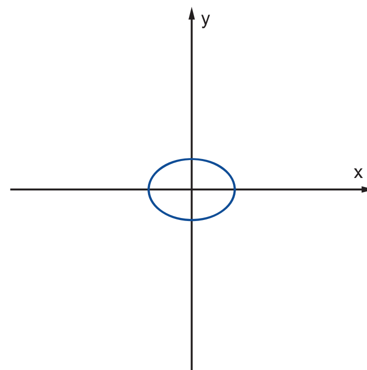
5



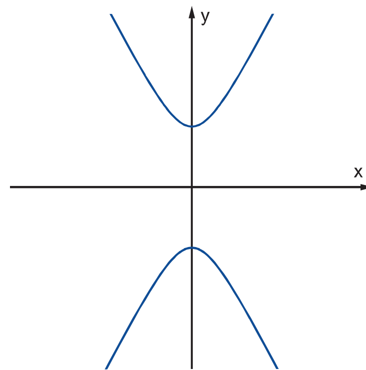
6



7



8



لە ڕاهێنانی 9 تا 13 تیشکۆ و سەرو دەلیلی ئەم بڕگە هاوتایانە بدۆزەوە، وێنەکانیان بکێشە.

9 $y^2=12x$

10 $y^2=-6x$

11 $(x+3)+(y-2)^2=0$

12 $x^2+4x+4y-4=0$

13 $y^2+4y+8x-12=0$

لە ڕاهێنانی 14 تاکو 17 هاوکێشەی ئەو بڕگە هاوتایانە بدۆزەوە.

14 سەر : $(3, 2)$ تیشکۆ: $(1, 2)$

15 سەر : $(0, 4)$ دەلیل: $y=-2$

16 تیشکۆ: $(2, 2)$ دەلیل: $x=-2$

17 سەر : $(2, 4)$ یەکتربڕینە ئاسۆییەکان $(0, 0)$ و $(4, 0)$.

لە پرسیاری 18 تا 21 پێکهاتەکانی ئەم بڕگە ناتەواوانە بدۆزەوە و وێنەکانیان بکێشە.

18 $5x^2+7y^2=70$

19 $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$

20 $9x^2+4y^2+36x-24y+36=0$

21 $9x^2+25y^2-36x+150y+36=0$

لە پرسیاری 22 تا 25 هاوکێشەی ئەم بڕگە ناتەواوانە بدۆزەوە.

22 چەق : $(0,0)$ تیشکۆ: $(2,0)$ سەر: $(3,0)$

23 سەرەکانی $(3,1)$ و $(3,9)$ ، تەوەری بچووک: 6

24 تیشکۆیەک: $(0,\pm5)$ تەوەری گەورە 14

25 چەق : $(1,2)$ تەوەری تیشکۆیی ستوونییە بە دوو خاڵی $(1,6)$ و $(3,2)$دا دەڕوات.

لە پرسیاری 26 تا 29 پێکهاتەکانی ئەم بڕگە زیادانە بدۆزەوە وێنەکانیان بکێشە.

26 $y^2-\frac{x^2}{4}=1$

27 $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{1}=1$

28 $9x^2-y^2-36x-6y+18=0$

29 $x^2-9y^2+2x-54y-81=0$

لە پرسیاری 30 تا 33 هاوکێشەی ئەم بڕگە زیادانە بدۆزەوە.

30 دوو سەرەکانی $(\pm1,0)$ دوو دەرکەنارەکان $y=\pm3x$.

31 دوو سەرەکانی $(2,\pm3)$ بە خاڵی $(0,5)$ دا دەڕوات.

32 چەق : $(0,0)$ تیشکۆ: $(0,4)$، سەر: $(0,2)$.

33 دوو سەرەکانی $(2,\pm3)$ دوو تیشکۆ: $(2,\pm5)$.

دەربارەی چەمکەکان

34 پێناسەی هەریەك لە بڕگەی هاوتا و بڕگەی ناتەواو و بڕگەی زیادبکە.

35 هاوکێشەی ئەو بڕگە زیاد کە سەرەکەی خاڵی (h,k) بێت بەشێوەی گشتی بنووسە.

36 هاوکێشەی ئەو بڕگە ناتەواوەی کە چەقەکەی (h,k) بێت بەشێوەی گشتی بنووسە.

37 هاوکێشەی ئەو بڕگە زیادەی کە چەقەکەی (h,k) بێت بەشێوەی گشتی بنووسە.

38 هاوکێشەی دوو هێڵە دەرکەنارەکانی ئەو بڕگە زیادەی چەقەکەی (h,k) بێت بدۆزەوە.

39 بەشێوازی خۆت (أسلوب) سیفەتی تیشکدانەوەی بڕگەی هاوتا بنووسە.

40 بڕگە هاوتای $y^2=8x$ دوو یەکە بۆ خوارەوە و یەك یەکە بۆ لای ڕاست ڕاکێشرا بۆ بەدەستهێنانی بڕگەی هاوتای $(y+2)^2=8(x-1)$.

أ سەری بڕگە هاوتا بنەڕەتییەکە و پۆوتانی تیشکۆو هاوکێشەی دەلیلەکەی بدۆزەوە.

ب سەری بڕگە هاوتا نوێیەکە و پۆوتانی تیشکۆ و هاوکێشەی دەلیلەکەی بدۆزەوە.

ج وێنەی هەردوو بڕگەکە (بنەڕەت و نوێیەکە) بکێشە.

2-6 پۆلینکردنی بڕگە قوچەکییەکان
Classifying Conics

ئامانجەکان
- بڕگە قوچەکییەکان بەپێی جیاوازی چەقی پۆلین دەکات.
- پێناسەی بڕگە قوچەکییەکان بە تیشکۆ و دەلیل پێناسە دەکات.

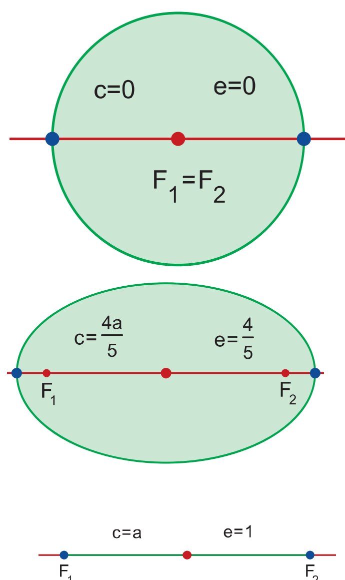
زاراوەکان
Vocabulary

جیاوازی چەقی	Eccentricity
تیشکۆ	Focus
دەلیل	Directrix

هەر بڕگەیەکی قوچەکی بە ژمارەیەك دەبەسترێت پێی دەوترێت **(جیاوازی چەقی)** بەهای جیاوازی چەقی جۆری بڕگەکە دیاریدەکات، ئایا بڕگەکە بازنەیە یان هاوتایە یان ناتەواوە یان زیادە. هەروەها پێکهاتەکانی لە هەردوو باری بڕگەی ناتەواو و بڕگەی زیاد دیاریدەکات. بە بڕگەی ناتەواو دەستپێدەکەین هەرچەندە دووری نێوان چەق و یەك لە تیشکۆکانی واتە c دەرناکەوێت لە هاوکێشەکەی.

$$(a > b)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

لەبەرئەوە بە بەکارهێنانی $c=\sqrt{a^2-b^2}$ دەدۆزینەوە ئەگەر بەهای a نەگۆڕێت و c بگۆڕێت لەماوەی $[0 ,\ a]$ ئەوا شێوەی بڕگەکە دەگۆڕێت وەك لەوێنەی بەرامبەر دەردەکەوێت. بڕگەکە دەبێتە بازنە کاتێك $c=0$ $(a=b)$ و درێژدەبێتەوە بە زیادکردنی بەهای c تا وایلێدێت دەبێتە پارچە ڕاستەهێڵ کاتێك $c=a$.



بەزیادبوونی بەهای e ، بڕگەی ناتەواو لە بازنە دەگۆڕێت بۆ پارچە ڕاستەهێڵ

ڕێژەی c بۆ a بۆ باسکردنی شێوە جیاوازەکانی بڕگەی ناتەواو بەکاردەهێنرێت ئەم ڕێژەیەش بریتییە لە جیاوازی چەقی.

جیاوازی چەقی

جیاوازی چەقی بڕگەی ناتەواوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ **بریتییە لە** $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

نموونـــــه 1
دۆزینەوەی سەرەکانی بڕگەی ناتەواو

پۆوتانی سەرەکانی بڕگە ناتەواوێك بدۆزەوە، کە جیاوازی چەقییەکەی 0.8 و تیشکۆکانی $(0 ,\ \pm 7)$ بێت.

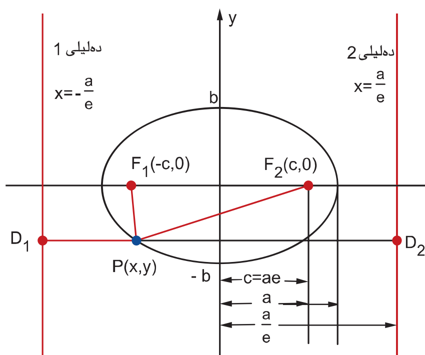
شیکار

پۆوتانی دوو سەرەکانی $(0 ,\ \pm a)$ لەبەرئەوەی $e=\frac{c}{a}$ ئەوا $a=\frac{c}{e}=\frac{7}{0.8}=8.75$ کەواتە

پۆوتانی دوو سەرەکانی دەبنە $(0 ,\ \pm 8.75)$.



1. پۆوتانی سەرەکانی بڕگە ناتەواوێك کە جیاوازی چەقییەکەی 0.75 و دوو تیشکۆکانی $(0 ,\ \pm 6.5)$ بێت بدۆزەوە.



برگەی هاوتا یەك تیشكۆ و یەك دەلیلی هەیە، بەڵام برگەی ناتەواو دوو دەلیل و دوو تیشكۆی هەیە. دوو دەلیلەكەی بریتیین لە دوو ڕاستەهێڵی ئەستوون لەگەڵ تەوەری تیشكۆیی و لە دووری $\pm\frac{a}{e}$ لەچەقەوە دەیانبڕێت هەر خاڵێكی وەك P لە خاڵەكانی برگەی هاوتا ئەم سیفەتەی هەیە $PF = 1 \times PD$ كە D نزیكترین خاڵە لە خاڵەكانی دەلیل لە P.

ئەم پەیوەندییە لەبرگەی ناتەواودا دەبێتە $PF_1 = e \times PD_1$
$PF_2 = e \times PD_2$ كاتێك e جیاوازی چەقی برگەی ناتەواوە كە تیشكۆكانی F_1، F_2 و D_1، D_2 دوو خاڵی سەر دوو دەلیلەكەن و نزیكترین خاڵن لە P.

لە هەردوو هاوكێشەی $PF_1 = e \times PD_1$ و $PF_2 = e \times PD_2$ پێویستە تیشكۆ و دەلیل لەهەمان دیوی چەقی برگە ناتەواوەكە بن.
دەلیلی $x = -\frac{a}{e}$ لەگەڵ تیشكۆی F_1 و دەلیلی $x = \frac{a}{e}$ لەگەڵ تیشكۆی F_2 بەكاربهێنە.

> جیاوازی چەقی بۆ برگەی زیادی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ و $(a > b)$ $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$.

سەرنجبدە جیاوازی چەقی برگەی ناتەواو و زیاد دەكاتە ڕێژەی دووری نێوان دوو تیشكۆ و دووری نێوان هەردوو سەرەكەی چونكە $e = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a}$

> **جیاوازی چەقی** = $\frac{\text{دووری نێوان دوو تیشكۆ}}{\text{دووری نێوان دوو سەر}}$

دووری نێوان دوو تیشكۆی برگەی ناتەواو لە دووری نێوان دوو سەرەكەی بچووكترە بۆیە، جیاوازی چەقی لە 1 كەمتر دەبێت، بەڵام دووری نێوان دوو تیشكۆی برگەی زیاد لە دووری نێوان دوو سەرەكەی گەورەترە، بۆیە جیاوازی چەقی لە 1 گەورەترە.

نموونــــه 2

دۆزینەوەی جیاوازی چەقی

جیاوازی چەقی بۆ برگەی زیادی $9x^2 - 16y^2 = 144$ بدۆزەوە.

شیكار

سەرەتا هاوكێشەكە بەشێوەی گشتی بنووسە.

$$9x^2 - 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

لەوەوە دەردەچێت $a = 4$، $b = 3$.

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ و $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$.



2. جیاوازی چەقی بۆ برگەی زیادی $16x^2 - 9y^2 = 144$ بدۆزەوە.

وەك لە برگەی ناتەواودا و هەروەها لە برگەی زیاددا دوو ڕاستەهێڵی $x = \pm\frac{a}{e}$ ڕۆڵی دوو ڕاستەهێڵی دەلیل دەبینین و $PF_1 = e \times PD_1$ و $PF_2 = e \times PD_2$ کە P خاڵێکی برگەو F_1 و F_2 دوو تیشکۆکانیەتی کاتێك D_1 و D_2 نزیکترین دوو خاڵی سەر دەلیلەکانن لە P . وە هەروەها لە بارەی هاوکێشەی برگەی ناتەواو، دەتوانین ڕوونیبکەینەوە کە هەردوو دەلیلەکە بریتین لە: $x = \pm\frac{a}{e}$.

پێناسەی یەکگرتووی برگە قووچەکییەکان

بۆ تەواوکردنی شێوە دەربارەی برگە قوچەکییەکان، جیاوازی چەقی برگەی هاوتا بە $e = 1$ پێناسە دەکەین.

جیاوازی چەقی برگەی هاوتا

جیاوازی چەقی لە برگەی هاوتا بریتییە $e = 1$.

ئەگەر پێداچوونەوەیەك بۆ ئەو پەیوەندییانەی کە سێ برگە قوچەکییەکان هەیانە بکەیت دەتوانیت پێناسەیەکی یەکگرتووی بدەینێ بە بەکارهێنانی تیشکۆ و دەلیل و جیاوازی چەقی.

پێناسەی یەکگرتووی برگە قوچەکییەکان

ئەگەر F خاڵێکی سەر ڕووتەخت بێت و d ڕاستەهێڵێك بێت لە ڕاستەهێڵەکانی و e ژمارەیەکی ڕاستی سالب نەبێت، ئەوا ئەو برگە قوچەکییەی تیشکۆیەکەی F و دەلیلەکەی d و جیاوازی چەقی e بێت بریتییە لە کۆمەڵە خاڵێك P لە ڕووتەختێکدا کە پاسادانی $PF = e \times PD$ یان $\frac{PF}{PD} = e$ دەکەن.

برگەی قوچەکی دەبێتە.

- برگەی هاوتا کاتێك $e = 1$.
- برگەی ناتەواو کاتێك $e < 1$.
- برگەی زیاد کاتێك $e > 1$.

هاوکێشەی $e = \frac{PF}{PD}$ بەکارهێنانی ئاسان نییە، چونکە پۆتانەکانی تێدانییە ئەگەر هەوڵبدەیت بیگۆڕیت بە بەکارهێنانی پۆتانەکان چەند ئەنجامێکی جیاوازت بۆ دەردەچێت بەپێی شێوەکانی و بەهای e بەڵام لە سیستمی پۆتانەکانی تر کە سیستمی جەمسەرییە کردارەکە زۆر ئاسانە، لەبەرئەوە زانایانی فەلەکناس و بۆشایی ئاسمان زیاتر لە 300 ساڵ بەر لەئێستا بەکاریاندەهێنێن.

ئەگەر تیشکۆو دەلیلی ئاوەڵی برگەی زیاد زانراوبێت و چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و تیشکۆی لەسەر تەوەرەی x بێت. دەتوانیت بەهای جیاوازی چەقی e دەستبکەوێت پاشانیش هاوکێشەیەکی تەوەرەییت لە هاوکێشەی $PF = e \times PD$ دەستدەکەوێت وەك لەم نموونەیەدا دەردەکەوێت، دەتوانین هەمانشت بکەین بۆ هاکێشەی برگەی ناتەواو چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و تیشکۆیەکەی لەسەر تەوەرەی x بێت.

نموونە 3 بەکارهێنانی تیشکۆو دەلیل

هاوکێشەی تەوەرەیی ئەو برگە زیادە بدۆزەوە کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و تیشکۆیەکیان $(3, 0)$ و دەلیلەکەی ڕاستەهێڵی $x = 1$ بێت.

شیکار

لەبەرئەوەی چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و تیشکۆیەکەشی $(3, 0)$ ئەوا $c = 3$، لەلایەکی ترەوە هاوکێشەی دەلیل $x = \frac{a}{e} = 1$ ئەمەش $a = e$ مان دەداتێ، لە کۆتاییدا $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{e}$ و بەوەش $e^2 = 3$
لە هەموو ئەمانە دەردەچێت $e = \sqrt{3}$.

لە لایەکی ترەوە دەتوانیت پەیوەندی بە تەوەرەیی بگۆڕیت بۆ $PF = e \times PD$.

$$PF = e \times PD$$
$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{3}|x-1|$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 3(x^2 - 2x + 1)$$
$$2x^2 - y^2 = 6$$
$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$$



3. هاوکێشەی تەوەرەیی ئەو برگە ناتەواو بدۆزەوە کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و تیشکۆیەکی $(3, 0)$ و دەلیلەکەی ڕاستەهێڵی $x = 4$ بێت.

2-6 ڕاهێنان

لە پرسیاری 1 تا 4 جیاوازی چەقی و دوو تیشکۆ و دوو دەلیلی برگە ناتەواوە کە بدۆزەوە.

1 $16x^2 + 25y^2 = 400$ **2** $2x^2 + y^2 = 2$ **3** $3x^2 + 2y^2 = 6$ **4** $6x^2 + 9y^2 = 54$

لە دوو پرسیاری 5 و 6 دا جیاوازی چەقی پاشان هاوکێشەی گشتی برگەی ناتەواو بدۆزەوە کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە بەزانینی تیشکۆ و دەلیل.

5 تیشکۆ: $(\sqrt{5}, 0)$ ، دەلیل $x = \frac{9}{\sqrt{5}}$.

6 تیشکۆ: $(-4, 0)$، دەلیل $x = -16$.

7 وێنەی برگەیەکی ناتەواو بکێشە کە جیاوازی چەقی بکاتە $\frac{4}{5}$ ڕێگای وێنەکێشانەکە ڕوونبکەوە.

8 سەرەکانی برگەیەکی ناتەواو بریتییە لە $(1, 1)$، $(3, 4)$، $(1, 7)$، $(-1, 4)$ وێنەکەی بکێشەو هاوکێشە گشتیەکەی بدۆزەوە، جیاوازی چەقی و تیشکۆکانی و دەلیلەکانی بدۆزەوە.

9 هاوکێشەی برگەیەکی ناتەواو بدۆزەوە کە جیاوازی چەقییەکەی $\frac{2}{3}$ و یەکێك لە تیشکۆکانی $(4, 0)$ و دەلیلەکەی $x = 9$ بێت.

لە پرسیاری 10 تا 13 جیاوازی چەقی و تیشکۆکانی و دەلیلەکانی برگە زیادەکە بدۆزەوە.

10 $9x^2 - 16y^2 = 144$ **11** $y^2 - x^2 = 8$

12 $8x^2 - 2y^2 = 16$ **13** $8y^2 - 2x^2 = 16$

لە دوو پرسیاری 14 و 15 دا هاوکێشەی گشتی برگە زیادەکە بەشێوەی پێوانەیی بدۆزەوە بە زانینی جیاوازی چەقی و هەردوو سەرەکانی یان هەردوو تیشکۆکانی.

14 جیاوازی چەقی 3 : دوو سەرە ستوونیەکانی $(0, \pm 1)$.

15 جیاوازی چەقی 3 : تیشکۆکان $(\pm 3, 0)$.

16 هاوکێشەی ئەو برگە زیادە بدۆزەوە کە جیاوازی چەقییەکەی $\frac{3}{2}$ ویەك لە تیشکوکانی $(1, -3)$و دەلیلی $y = 4$.

17 بەهایەکانی a و b و c بدۆزەوە کاتێك برگە ناتەواوی $4x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ بە خاڵی $(-1, 2)$ دەڕوات و لە تەوەری x دەکەوێت لە خاڵی بنەڕەتدا، بەهای جیاوازی چەقی برگەکە چەندە؟

18 هاوکێشەی ئەو برگە زیادە بدۆزەوە کە پێکهاتووە لەو خاڵانەی ڕووتەختێك کە بەهای ڕووتی جیاوازی نێوان دوو دووریەکانیان لە دوو خاڵی $(2, 2)$ و $(10, 2)$ دەکاتە بەهای نەگۆڕ 6 .

بەشی 6

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

1-6 برگە قوچەکییەکان

1 پۆوتانی تیشکۆ و سەری برگەو هاوکێشەی دەلیلی برگە هاوتایەکە بدۆزەوە، پاشان وێنەکەی بکێشە.

أ $y^2-4x=0$ ب $x=2(1-y^2)$ ج $x^2-2x+2y+3=0$

2 پۆوتانی چەق و دوو تیشکۆ و جیاوازی چەقی برگە ناتەواوەکە بدۆزەوە، پاشان وێنەکەی بکێشە.

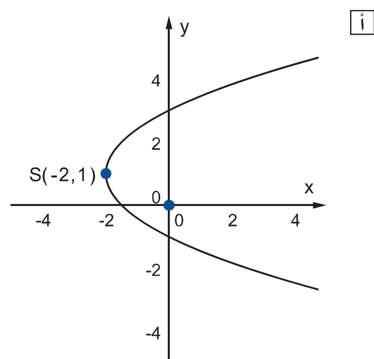
أ $x^2+4y^2=1$ ب $4x^2+y^2-8x-12=0$

3 پۆوتانی چەق و دوو تیشکۆ و درێژی تەوەری گەورەی برگە زیادەکە بدۆزەوە، پاشان وێنەکەی بکێشە.

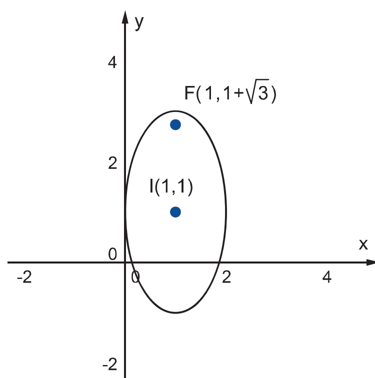
أ $x^2-y^2=4$ ب $4(y-1)^2-x^2=1$

4 هاوکێشەی ئەم برگە قوچەکییانە بەشێوەی گشتی بنووسە.

أ



ب



5 هاوکێشەی برگە ناتەواوێك بەشێوەی گشتی بدۆزەوە، کاتێك چەقەکەی $I(3,1)$ یەکێك لەسەرەکانی $A(6,1)$ و یەکێك لە دەلیلەکانی ڕاستەهێڵی $x=7$ بێت.

6 هاوکێشەی برگە زیادێك بەشێوەی گشتی بدۆزەوە، کاتێك چەقەکەی خاڵی بنەڕەت ویەکێك لەسەرەکانی $A(3,0)$ و جیاوازی چەقی $\frac{5}{3}$ بێت.

2-6 پۆلێنکردنی برگە قوچەکییەکان

7 M خاڵێکە لە ڕووتەختی پۆوتاندا بەپێی ئەم پەیوەندییە $|MA-MB|=1$ دەجووڵێت، کاتێك $A(0,-1)$، $B(0,3)$ بێت، جۆری چەماوەی جووڵەی خاڵەکە دیاریبکەو هاوکێشەکەی بدۆزەوە.

8 خاڵی M لە ڕووتەختی پۆوتاندا دەجوڵێت بەمەرجێك دووری نێوانی و خاڵی بنەڕەت دەکاتە (دوو سێیەکی دووری نێوانی و ڕاستەهێڵی $x=\frac{5}{2}$. جۆری چەماوەی جوڵەی خاڵەکە دیاریبکە و هاوکێشەکەی لەسەر شێوەی گشتی بنووسە.

3–6

هاوکێشە دووجایەکان بە دوو گۆڕاو
Quadratic Equations in 2 Variables

ئامانجەکان

- لە ڕادەی یەکتربڕین دەرباز دەبێ بە سوڕانی تەوەری پۆوتانەکان.
- نواندنە ڕوونکردنەوەییە جیاوازەکانی هاوکێشەیەکی دووجای دوو گۆڕاو دیاریدەکات.
- تاقیکردنەوەی جیاکەرەوە بەکاردەهێنێت بۆ پۆلینکردنی هاوکێشەی دووجای بە دوو گۆڕاو.

زاراوەکان
Vocabulary

چەماوە دووجاکان
Quadratic Curves

جیاکەرەوە
Discriminant

چەماوە دووجاکان

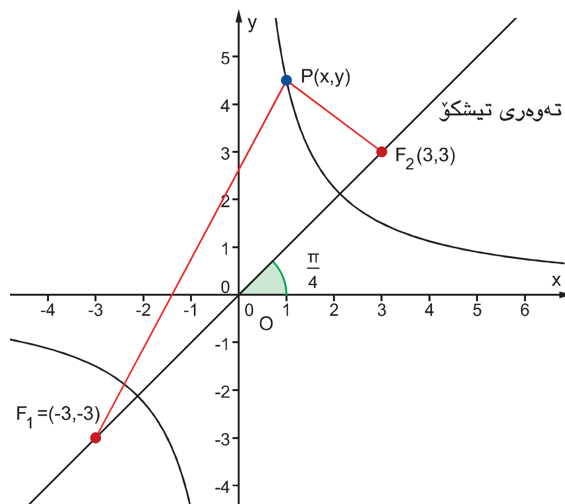
لەم وانەیەدا فێری بابەتێکی زۆر سەرسورهێنەر دەبێت لە ئەندازەی پۆوتانەکان، کە بریتییە لە نواندنی ڕوونکردنەوەی هاوکێشەیەکی دووجای دوو گۆڕاو کە بەشێوەی $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ دەنووسرێت، کاتێك A و B و C و D و E و F ژمارەی ڕاستین هەموویان ناکەنە سفر، بەزۆری ئەم چەماوەیە برگەی قوچەکییە، بەڵام جار هەیە لەباری شێواوی (خاڵێك یان دوو ڕاستەهێڵی تەریب یان کۆمەڵەی بەتاڵ) دەبێت.

ئەو چەماوانەی هاوکێشەی دووجای دوو گۆڕاو دەنوێنن بە **چەماوە دووجاکان** ناسراون، بێ گومان دەربارەی ڕادەی Bxy دەپرسێت، کە پێشتر لە هاوکێشەی برگە قوچەکییەکان بەرچاوت نەکەوتووە بەو ڕادەیە دەوترێت ڕادەی یەکتربڕین. نەبوونی ڕادەی یەکتربڕین بۆ ئەوە دەگەڕێتەوە کە تەوەرەکانی برگە قوچەکییەکان هەردەم بە تەوەری پۆوتانەکان تەریب بوون، بۆ ئەوەی ببینیت چی ڕوودەدات و کاتێك تەوەرەکان بەتەوەری پۆوتانەکان تەریب نابێت، هاوکێشەی برگەی زیاد لەباری $a = 3$ و تیشکۆکان $(-3, -3)$ F_1 ، $F_2(3, 3)$ دەنووسین.

ئەو برگە زیادە بریتییە لە کۆمەڵە خاڵێکی $P(x, y)$ کە پاسادانی $|PF_1 - PF_2| = 2a = 2(3) = 6$ دەکات بەشێوەی پۆوتانەکان دەکاتە.

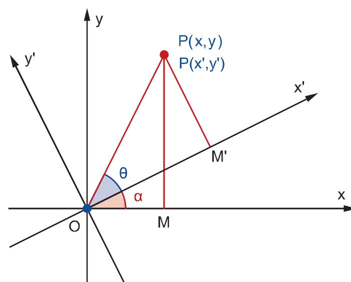
$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+3)^2} - \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} = \pm 6$$

ئەگەر یەکێك لە ڕەگەکانت جیاکردەوە بۆ لایەك بەتەنیا و دووجات کرد، پاشان ئەو ڕەگەی ماوە لەلایەك بەتەنیات داناو لەنوێیەوە دووجات کرد و لە دوای کورتکردنەوە $2xy = 9$ دەستدەکەوێت.



دوو هێڵە دەرکەنارەکانی برگە زیادەکە بەپێی هاوکێشە نوێیەکە هەردوو تەوەری پۆوتانەکانە، بەڵام تەوەری تیشکۆ لەگەڵ ئاڕاستەی موجەبی تەوەری x گۆشەیەك پێکدەهێنێت، پێوانەکەی $\frac{\pi}{4}$ ڕادیان (بازنەیی)

سوڕاندنی دوو تەوەری پۆوتانەکان بۆ ڕزگاربوون لە ڕادەی Bxy



بۆ ڕزگاربوون لە ڕادەی یەکتربڕین، ئەوانەی لە بواری بیرکاری کاردەکەن هەڵدەستن بە سوڕانی تەوەرەکانی پۆوتان بەدەوری خاڵی بنەڕەتدا بۆ دەستکەوتنی ڕووتەختێکی نوێ بۆ ئەوەی هاوکێشەی چەماوەکە هیچ ڕادەیەکی یەکتربڕینی تێدا نەمێنێت.

بەپێی وێنەی بەرامبەر دەتوانیت بنووسیت:

$$x = OM = OP\cos(\theta+\alpha) = OP\cos\theta\cos\alpha - OP\sin\theta\sin\alpha$$

$$y = PM = OP\sin(\theta+\alpha) = OP\cos\theta\sin\alpha + OP\sin\theta\cos\alpha$$

لەبەرئەوەی $OP\cos\theta = OM' = x'$ و $OP\sin\theta = M'P = y'$.

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

دەتوانین پەیوەندی سەرەوە بەشێوەی ڕیزکراوەکان دەرببڕین وەك لەپۆلی یازدەم فێری بوویت.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

نموونـــە 1

ڕزگاربوون لە ڕادەی یەکتربڕین

هاوکێشەی برگەی زیادی $2xy = 9$ لە ڕووتەختی پۆوتانەکان کە لە ئەنجامی سووڕانی تەوەری پۆوتانەکان دەردەچێت بەدەوری خاڵی بنەڕەت بەگۆشەی $\frac{\pi}{4}$ دا بدۆزەوە.

شیکار

لە $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ دەردەچێت $x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$ و $y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$ بە لە جیاتیدانی x و y لە $2xy = 9$

دەردەچێت کە: $2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) = 9$

یان $\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{9} = 1$ دەبێتە هاوکێشەی برگەی زیاد لە ڕووتەختی پۆوتانە نوێیەکە.



1. هاوکێشەی برگە زیادی $xy = 1$ کە لە ئەنجامی سوڕانی تەوەری پۆوتانەکان دەردەچێت بە دەوری خاڵی بنەڕەت بەگۆشەی $\frac{\pi}{4}$ ڕادیان بدۆزەوە.

ئەگەر بگەڕیینەوە بۆ هاوکێشەی دووجای دوو گۆڕاو و لەجیاتی x و y بەهایەکانی α و x' و y' دانا ئەوا ئەم شێوەی خوارەوەمان لە هاوکێشەکە دەستدەکەوێت لە ڕووتەختە نوێیەکەی پۆوتانەکان.

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

هاوکۆڵکەی نوێیەکان و کۆنەکان بەم پەیوەندییەی خوارەوە بەیەکەوە دەبەسترێن.

$$A' = A\cos^2\alpha + B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha$$
$$B' = B\cos 2\alpha + (C - A)\sin 2\alpha$$
$$C' = A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha$$
$$D' = D\cos\alpha + E\sin\alpha$$
$$E' = -D\sin\alpha + E\cos\alpha$$
$$F' = F$$

بۆ رزگاربوون لە ڕادەی $B'x'y'$ ئەوەندە بەسە کە α هەڵبژێرێت کاتێك $B'=0$ ئەمەی خوارەوەمان دەستدەکەوێت.

دیاریکردنی گۆشەی سووڕان α

- ئەگەر $A=C$ ، $\alpha=\frac{\pi}{4}$ هەڵبژێرە ئەوا $B'=\mathrm{B}\cos 2\alpha=\mathrm{B}\cos\frac{\pi}{2}=0$.
- ئەگەر $A\neq C$ ، α هەڵبژێرە بە مەرجێك $\tan 2\alpha=\frac{B}{A-C}$.

نموونــــــه 2 رزگاربوون لەڕادەی یەکتربڕین

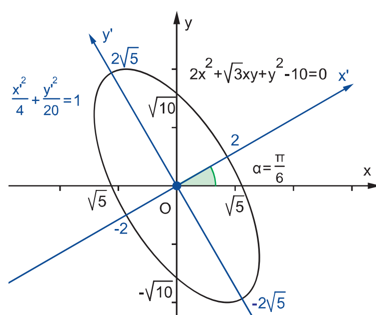
گۆشەی سووڕانەوەی α بدۆزەوە بەمەرجێك هاوکێشەی $2x^2+\sqrt{3}xy+y^2-10=0$ لە ڕووتەختی پۆوتانی نوێدا ڕادەی یەکتربڕینی تێدانەبێت، هاوکێشەی چەماوەکە لە ڕووتەختی پۆوتانی نوێدا بدۆزەوە.

شیکار

$A=2$ ، $B=\sqrt{3}$ ، $C=1$ بە لە جیاتیدانان $\tan 2\alpha=\frac{B}{A-C}=\frac{\sqrt{3}}{2-1}=\sqrt{3}$ مان دەستدەکەوێت لەمەش دەردەچێت $2\alpha=\frac{\pi}{3}$ و $\alpha=\frac{\pi}{6}$ ، هاوکۆڵکەی هاوکێشەی چەماوەکە لەڕووتەختی پۆوتانی نوێدا ئەمەیە $2\alpha=\frac{\pi}{3}$ و $\alpha=\frac{\pi}{6}$ و $A'=\frac{5}{2}$ و $B'=0$ و $C'=\frac{1}{2}$ و $D'=E'=0$ و $F'=-10$ ئەمەش ئەوەمان دەداتێ:

$$\frac{5}{2}(x')^2+\frac{1}{2}(y')^2-10=0$$

ئەم چەماوەیە هی برگەی ناتەواوە، تیشکۆکانی دەکەونە سەر تەوەرەی y' یان $\frac{(x')^2}{4}+\frac{(y')^2}{20}=1$.





2. گۆشەی سووڕانەوەی α بدۆزەوە کاتێك هاوکێشەی چەماوەی $xy-x-y+1=0$ لە ڕووتەختی پۆوتانی نوێدا ڕادەی یەکتربڕینی تێدانەبێت وهاوکێشەی چەماوەکە لەڕووتەختی پۆوتانی نوێدا بدۆزەوە.

نواندنی ڕوونکردنەوەی هاوکێشەی دووجا بە دوو گۆڕاو

لەبەرئەوەی هەموو کات دەتوانین ڕادەی یەکتربڕین لابدەین کەواتە دەتوانین $B=0$ گریمان بکەین و هاوکێشەی دووجای دوو گۆڕاو بەم شێوەیە بنووسین $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$.

ئەم هاوکێشەیە یەکێك لەم بارانەی خوارەوە دەنوێنێت.

1. بازنە کاتێك $A=C\neq 0$ (دووباری نارێکی هەیە ئەویش خاڵ و کۆمەڵەی بەتاڵە).

2. برگەی هاوتا کاتێك یەکێك لە گۆڕاوەکانی دووجاو ئەوی تریان پلەیەك بێت.

3. برگەی ناتەواو کاتێك A و C هەمان نیشانەیان هەبێت (دووباری نارێکی هەیە خاڵ وکۆمەڵەی بەتاڵ).

4. برگەی زیاد کاتێك A و C دوو نیشانەی جاوازیان هەبێت (بارێکی نارێکی هەیە دوو ڕاستەهێڵی یەکتربڕ).

5. ڕاستەهێڵ کاتێك $A=C=0$ و بەلایەنی کەمەوە یەکێك لە دوو هاوکۆڵکەی D و E جیاوازبن لە سفر.

6. ڕاستەهێڵێك یان دوو ڕاستەهێڵ ئەگەر لە تواناد‌ا بوو لای چەپی هاوكێشەكە شیتەڵ بكرێت بە شێوەی ئەنجامی لێكدانی دوو كۆڵكەی هێڵی. ئەم خشتەیەی خوارەوە چەند نموونەیەكن.

	A	B	C	D	E	F	هاوكێشە	تێبینی
بازنە	1	0	1	0	0	-4	$x^2+y^2=4$	$F<0$ ؛ $A=C$
برگەی هاوتا	0	0	1	-9	0	0	$y^2=9x$	دووجایە لە y، هێڵییە لە x.
برگەی ناتەواو	4	0	9	0	0	-36	$4x^2+9y^2=36$	$F<0$ ، $A\neq C$ ، $AC>0$
یەك ڕاستەهێڵ	1	0	0	0	0	0	$x^2=0$	تەوەری y
دوو ڕاستەهێڵی یەكتربڕ	0	1	0	1	-1	-1	$xy+x-y-1=0$	شیتەڵ بۆ $(x-1)(y+1)=0$ $y=-1$ ، $x=1$
دوو ڕاستەهێڵی تەریب	1	0	0	-3	0	2	$x^2-3x+2=0$	شیتەڵ بۆ $(x-1)(x-2)=0$ $x=2$ ، $x=1$
خاڵ	1	0	1	0	0	0	$x^2+y^2=0$	خاڵی بنەڕەت
كۆمەڵەی بەتاڵ	1	0	0	0	0	1	$x^2=-1$	كۆمەڵەی بەتاڵ

تاقیكردنەوەی جیاكەرەوە Discriminant Test

بە ڕەچاوكردنەوەی ئەوەی هەندێك برگەی قوچەكی باری نارێكیان هەیە، بەڵام ئەو چەماوەی هاوكێشەی $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ بنوێنێت، دەبێتە:

- برگەی هاوتا كاتێك جیاكەرەوە بكاتە 0.
- برگەی ناتەواو كاتێك جیاكەرەوە سالبە.
- برگەی زیاد كاتێك جیاكەرەوە موجەبە.

جیاكەرەوە B^2-4AC

نموونە 3 تاقیكردنەوەی جیاكەرەوە

جۆری ئەم چەماوەیە دیاریبكە كە هەریەك لەم هاوكێشانە دەنوێنێت:

أ $3x^2-6xy+3y^2+2x-7=0$ ب $x^2-xy+y^2-1=0$ ج $xy-y^2-5y+1=0$

شیكار

أ $B^2-4AC=(-6)^2-4(3)(3)=36-36=0$ برگەی هاوتایە.

ب $B^2-4AC=(1)^2-4(1)(1)=1-4=-3<0$ برگەی ناتەواوە.

ج $B^2-4AC=(1)^2-4(0)(-1)=1>0$ برگەی زیاد.



3. جۆری ئەم چەماوەیە دیاریبكە كە هەریەك لەم هاوكێشانە دەنوێنێت.

أ $2x^2-4xy+2y^2+2x-7=0$ ب $2x^2+xy+y^2-5=0$

ج $x^2-xy-y^2-5y+1=0$

3-6 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تا 8 جیاکەرەوە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی جۆری ئەو چەماوەی هاوکێشەکە دەنوێنێت.

1 $x^2 - 3xy + y^2 - x = 0$

2 $3x^2 - 7xy + \sqrt{17}y^2 = 1$

3 $x^2 + 2xy + y^2 - y + 2 = 0$

4 $x^2 + 4xy + 4y^2 - 3x = 6$

5 $xy + y^2 - 3x = 5$

6 $3x^2 - 5xy + 2y^2 - 7x - 14y = -1$

7 $x^2 - 3xy + 3y^2 + 6y = 7$

8 $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y + 2 = 0$

9 **بنووسە** چی دەتوانیت بنووسیت لەبارەی ئەو وێنە ڕوونکردنەوەی هاوکێشەی $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ دەنوێنێت، ئەگەر $AC < 0$؟ بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە.

10 **بنووسە** ئایا هیچ برگەیەکی قووچەکی ڕێك هەیە لە هاوکێشەی $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ئەم سیفەتانەی تێدابێت.

أ هاوجێ بێت لەگەڵ خاڵی بنەڕەت.

ب بەخاڵی $(1, 0)$ دا بڕوات، بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە.

11 أ جۆری برگەی قوچەکی ئەم هاوکێشەیە $xy + 2x - y = 0$ دیاریبکە؟

ب هاوکێشەکە بەکاربهێنە بۆ ئەوەی بەهای y بەپێی x بنووسیت، ئەو هاوکێشەی دەستت کەوت بە شێوەی نەخشەیەکی ڕێژەیی y بەپێی x بنوێنە.

ج پۆوتانی دوو خاڵی برگە قوچەکییەکە بدۆزەوە کە تێیدا لێکەوت ئەستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y = -2x$

12 **نیشانەی AC** ڕاستی هەر دەستەواژەیەك لەبارەی چەماوەی $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ بسەلمێنە یان دژە نموونەیەك بهێنەوە بۆ سەلماندنی ناڕاستی دەستەواژەکە.

أ ئەگەر $AC > 0$ ئەوا چەماوەکە برگەی ناتەواوە.

ب ئەگەر $AC = 0$ ئەوا چەماوەکە برگەی هاوتایە.

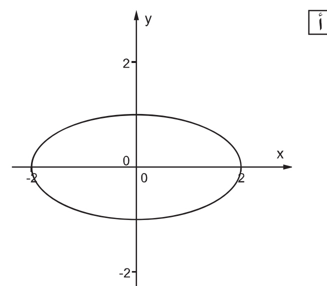
ج ئەگەر $AC < 0$ ئەوا چەماوەکە برگەی زیادە.

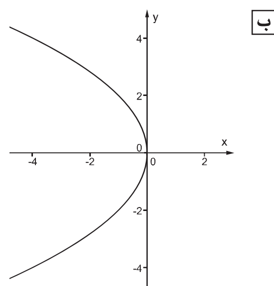
بەرەنگاری «بۆ تێڕوانین»

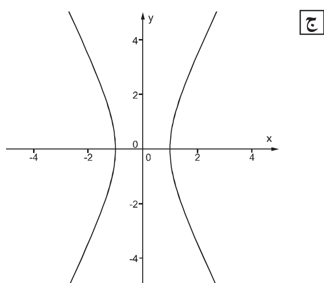
13 **ڕووبەری برگەی ناتەواو** ئەگەر $B^2 - 4AC < 0$ ئەوا وێنەی ڕوونکردنەوەی هاوکێشەی $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ برگەی ناتەواوە، تەوەرە گەورەکەی $2a$ و تەوەرە بچووکەکەی $2b$ و ڕووبەرەکەی دەکاتە πab بسەلمێنە کە ڕووبەری برگەی ناتەواو دەکاتە $\frac{2\pi}{\sqrt{4AC - B^2}}$

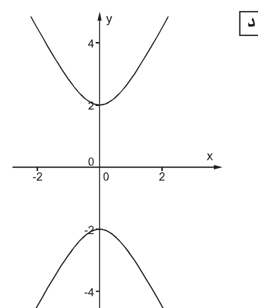
بەشی
6
پێداچوونەوەی بەش

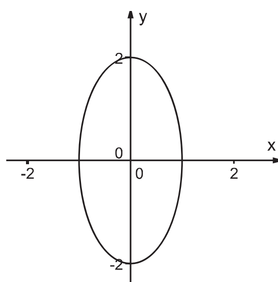
لە پرسیاری 1 تا 6 وێنەی ڕوونکردنەوەی هەر هاوکێشەیەك دیاریبکە.

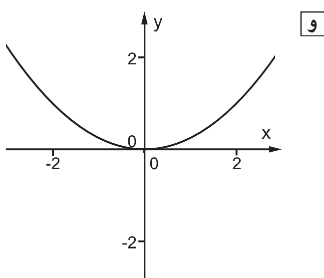
أ


ب


ج


د


هـ


و


1 $4x^2 + y^2 = 4$

2 $4x^2 - y^2 = 4$

3 $y^2 = -4x$

4 $y^2 - 4x^2 = 4$

5 $x^2 + 4y^2 = 4$

6 $x^2 = 4y$

لە پرسیاری 7 تا 10 هاوکێشەکە شیتەڵبکە و ڕوونکردنەوەکەی بکێشە.

7 $16x^2 + 16y^2 - 16x + 24y - 3 = 0$

8 $3x^2 - 2y^2 + 24x + 12y + 24 = 0$

9 $3x^2 + 2y^2 - 12x + 12y + 29 = 0$

10 $y^2 - 12y - 8x + 20 = 0$

لە دوو پرسیاری 11 و 12 هاوکێشەی برگە هاوتایەکە بدۆزەوە.

11 سەر $(0, 2)$ دەلیل $x = -3$

12 سەر $(4, 2)$ تیشکۆ $(4, 0)$

لە دوو پرسیاری 13 و 14 هاوکێشەی برگە ناتەواوەکە بدۆزەوە.

13 سەرەکان: $(-3, 0)$ $(7, 0)$
چەق: $(0, 0)$ $(4, 0)$

14 چەق: $(0, 0)$
بە دوو خاڵی $(1, 2)$ و $(2, 0)$ دا دەڕوات.

لە دوو پرسیاری 15 و 16 هاوکێشەی برگە زیادەکە بدۆزەوە.

15 سەرەکان: $(-4, 0)$ و $(4, 0)$
تیشکۆکان: $(-6, 0)$ $(6, 0)$

16 تیشکۆکان: $(0, -8)$ ، $(0, 8)$
هێڵە دەرکەنارەکان: $y = -4x$ و $y = 4x$.

17 هاوکێشەی لێکەوتی بڕگەی هاوتای $y = x^2 - 2x + 2$ بدۆزەوە، کە ئەستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y = x - 2$.

18 هاوکێشەی لێکەوتی بڕگە هاوتای $3x^2 + y = x - 6$ بدۆزەوە، کە ئەستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $2x + y = 5$.

19 **سێڵی وەرگر** پارچەیەکی سێڵە وەرگرێکی گەورە شێوەی بڕگە هاوتایەك وەردەگرێت کە هاوکێشەکەی $y = \frac{x^2}{200}$ بێت کاتێك $-100 \le x \le 100$ نەخشەسازەکە ئامێری وەرگرەکەی لە تیشکۆی بڕگە هاوتایەکە دانا، پۆوتانی ئەم تیشکۆیانە چەندە؟

20 جیاوازی چەقی بۆ ئەم بڕگە قوچەکییانە بدۆزەوە و جۆرەکانی دیاریبکە.

أ $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

ب $4x^2 - y^2 - 4x - 3 = 0$

ج $25x^2 - 10x - 200y - 199 = 0$

د $9x^2 + 9y^2 - 36x + 6y + 34 = 0$

لە پرسیاری 21 تا 24 هاوکێشەی بڕگە قوچەکییەکە بەشێوەی گشتی بدۆزەوە.

21 جیاوازی چەقی: 0.7 تیشکۆکان: $(0, \pm 2)$

22 سەرەکان: $(\pm 5, 0)$ جیاوازی چەق: 1.5

23 بڕگەی هاوتا تیشکۆ: $(1, 1)$ سەر: $(0, 1)$

24 بڕگەی ناتەواو تیشکۆ: $(-3, 0)$ دەلیل: $x = -9$، جیاوازی چەقی: $\frac{1}{2}$

لە پرسیاری 25 تا 28 جۆری بڕگە قوچەکییەکەو پێکهاتەکانی بدۆزەوە.

25 $16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0$

26 $16x^2 - 25y^2 + 96x - 256 = 0$

27 $4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0$

28 $x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0$

لە پرسیاری 29 تا 34 جیاکەرەوە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی جۆری ڕوونکردنەوەی هاوکێشەکە.

29 $3x^2 - 18xy + 27y^2 - 5x + 7y + 4 = 0$

30 $2x^2 - \sqrt{15}xy + 2y^2 + x + y = 0$

31 $2x^2 + 4xy - y^2 - 2x + 3y - 6 = 0$

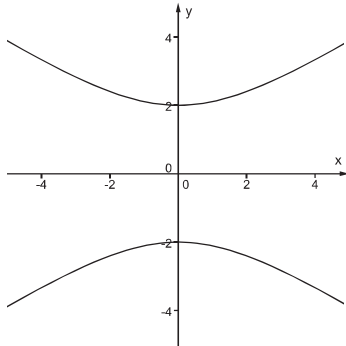
32 $x^2 + y^2 + 3x - 2y - 10 = 0$

33 $xy + y^2 - 3x - 5 = 0$

34 $3x^2 + 12xy + 12y^2 + 435x - 9y + 72 = 0$

بـــەشی 6

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە



1 کام لەمانە هاوکێشەی وێنەی بەرامبەرە؟

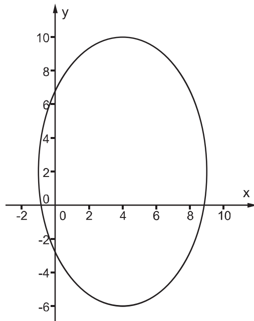
أ $9x^2 - 4y^2 = 36$　　ب $4x^2 + 9y^2 = 36$

ج $9y^2 - 4x^2 = 36$　　د $9x^2 + 4y^2 = 36$

2 کام لەم خاڵانە دەبێتە خاڵی یەکتربڕینی هاوکێشەی $4x^2 + 25y^2 = 100$ لەگەڵ تەوەری x.

أ $(2, 0)$ و $(-2, 0)$　　ب $(4, 0)$ و $(-4, 0)$.

ج $(5, 0)$ و $(-5, 0)$　　د $(10, 0)$ و $(-10, 0)$



3 کام لەمانە هاوکێشەی وێنەی بەرامبەرە؟

أ $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{64} = 1$　　ب $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{576} = 1$

ج $\frac{(x-1)^2}{20} + \frac{(y-1)^2}{150} = 1$　　د $\frac{x^2}{175} + \frac{y^2}{225} = 1$

4 کام لەم برگە زیادانە گەورەترین دووری نێوان دوو تیشکۆی هەیە؟

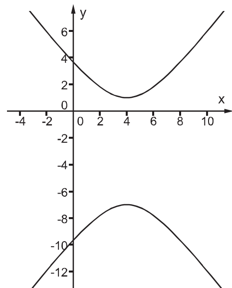
أ $\frac{(x-6)^2}{36} - \frac{(y+2)^2}{81} = 1$　　ب $\frac{(x+22)^2}{45} - \frac{(y-36)^2}{125} = 1$

ج $\frac{(y+115)^2}{49} - \frac{(x-225)^2}{100} = 1$　　د $\frac{(y-59)^2}{90} - \frac{(x+76)^2}{95} = 1$

5 کام لەم هاوکێشانە دەرکەناری بۆ برگەی زیاد $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

أ $y = -\frac{2}{3}x$　　ب $y = \frac{3}{2}x$

ج $y = -\frac{9}{4}x$　　د $y = \frac{9}{4}x$



6 کام لەمانە هاوکێشەی وێنەی بەرامبەرە؟

أ $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+4)^2}{9} = 1$　　ب $\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1$

ج $\frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1$　　د $\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x-4)^2}{9} = 1$

7 درێژی تەوەری بچووکی برگەی ناتەواوی $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{121} = 1$ بریتییە لە:

أ 7　　ب 11　　ج 14　　د 22

8 کام لەم برگە هاوتایانەی خوارەوە کراوەتەوە بەلای چەپدا؟

أ $16y-4x^2=12$

ب $16y+4x^2=12$

ج $16x-4y^2=12$

د $16x+4y^2=12$

9 کام لەمانەی دێت تەوەری هاوجێیە بۆ برگەی هاوتای $x-4=\frac{1}{8}(y+2)^2$؟

أ $x=0$ ب $y=-2$ ج $x=4$ د $y=8$

10 کام لەم برگە هاوتایانە دەلیلەکەی بریتییە لە $y=4$؟

أ $y+3=\frac{1}{4}(x-1)^2$

ب $y-5=\frac{1}{4}(x+2)^2$

ج $x-5=\frac{1}{4}(y+4)^2$

د $x+3=\frac{1}{4}(y-2)^2$

11 لێکەوتی برگە هاوتای $y=ax^2$ لە $x=p$ تەوەری x دەبڕێت لە؟

أ $x=\frac{p}{2}$ ب $x=\frac{p^2}{2}$ ج $x=\frac{ap}{2}$ د $x=\frac{ap^2}{2}$

12 لاری لێکەوت بۆ چەماوەیەك لە خاڵی (x, y) دەکاتە $\frac{x}{y}$ بۆ هەر خاڵێکی سەر چەماوەکە، جۆری چەماوەکە چییە؟

أ بازنە ب برگەی هاوتا ج برگەی ناتەواو د برگەی زیاد

13 کام لەمانەی خوارەوە تیشکۆی برگە هاوتای $y^2+4y-8x+36=0$ ؟

أ $(-2, 6)$ ب $(6, -2)$ ج $(2, -2)$ د $(4, -2)$

14 جۆری ئەو چەماوە چییە کە هاوکێشەکەی $x^2+4y^2-6x+16y+21=0$ بێت.

أ بازنە ب برگەی هاوتا ج برگەی ناتەواو د برگەی زیاد

ژمارە ئاویێتەکان و ئەندازە

Complex Numbers And Geometry

بەشی حەوتەم

وانەکان

شێوە پەیدابووەکان

شێوە پەیدابووەکان بریتین لە پەیدابوونی زنجیرەیی بە دەستپێکردن لە خاڵێکی دیاریکراودا یان شێوەیەکی دیاریکراو. ژمارە ئاوێتەکان بەکاردەهێنرێت بۆ پێکهێنانی شێوە پەیدابووەکان وەك ئەو شێوەیەی کە وێنەکە دەریدەخات.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

1 هەر دەستەواژەیەك لەستوونی یەکەم ببەستەوە بە ڕوونکردنەوەکەی لە ستوونی دووەم.

1. ژمارەی ئاوێتە
2. ڕاکێشان
3. وێنەدانەوە بەدەوری ڕاستەهێڵ
4. ژمارەی ڕاستی
5. هاوڕێژەی ئەندازەیی.

أ. ژمارەیەکە بەشێوەی $\frac{a}{b}$ دەنووسرێت، کاتێك a ، b دوو ژمارەی تەواون و $b \neq 0$.

ب. جێگۆڕکێیەکی ئەندازەییە خاڵی $A(x, y)$ بۆ خاڵی $A'(kx, ky)$ دەگۆڕێت.

ج. ژمارەیەکەبەشێوەی $a + ib$ دەنووسێت کاتێك a ، b ژمارەی ڕاستین $i^2 = -1$.

د. جێگۆڕکێیەکی ئەندازەییە، هەموو خاڵەکانی ڕووتەختێك کاتێك k ژمارەیەکی ڕاستییە بەهەمان ماوە و بەهەمان ئاڕاستە ڕادەکێشێت.

هـ. دووری نێوان خاڵێکی لەسەر تەوەری ژمارەکان و خاڵی بنەڕەتە.

و. جێگۆڕکێیەکی ئەندازەییە، هەر خاڵێکی وەك A بۆ خاڵی A' دەگۆڕێت بەمەرجێك $\overline{AA'}$ تەوەری ڕاستەهێڵەکە بێت.

جێگۆڕکێ ئەندازەییەکان

لە ڕاهێنانی 2 تا 9 پۆوتانی شێوەی خاڵی $A(1, 1)$ بە جێگۆڕکێی دیاریکراو بدۆزەوە:

2 وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x .

3 وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری y .

4 وێنەدانەوە بەدەوری ڕاستەهێڵی $y = x$.

5 ڕاکێشان بە ئاڕاستە بڕی $\vec{u}\ \langle 2, -3\rangle$

6 هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و ڕێژەکەی $\frac{1}{2}$.

7 خولانەوە بەدەوری خاڵی بنەڕەت بەگۆشەی $135°$.

8 خولانەوە بەدووری خاڵی بنەڕەت بەگۆشەی $-90°$.

9 وێنەدانەوە بەدەوری ڕاستەهێڵی $x = 2$ پاشان خولانەوە بەدەوری خاڵی بنەڕەت گۆشەکەی $90°$ بێت.

هاوکێشەی دووجایی

لە ڕاهێنانی 10 تا 13 جۆری ڕەگەکانی هاوکێشەی دووجایی و ژمارەکانیان دیاریبکە.

10 $2x^2 + 5x - 9 = 0$

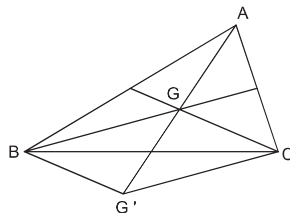
11 $x^2 + x + 1 = 0$

12 $-3x^2 + 5x - 11 = 0$

13 $2x^2 + 8x + 8 = 0$

ئاڕاستەبڕەکان

14 لەوێنەی بەرامبەر، G خاڵی یەکتربڕینی هێڵە ناوەندەکانی سێگۆشەی ABC و G' شێوەی G بە وێنەدانەوە بەدەوری ناوەڕاستی $\overline{BC}$ دەنوێنێت $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ بدۆزەوە.



1–7 شێوە جیاوازەکانی ژمارەی ئاوێتە
Various Forms of a Complex Number

ئامانجەکان

- بەهای رووتی ژمارە ئاوێتە و گۆشە جەمسەرییەکەی دەدۆزێتەوە.
- ژمارەیەکی ئاوێتە بەشێوەی جەبری و سێگۆشەیی و جەمسەری دەنووسیت.

زاراوەکان
Vocabulary

بەهای ڕووت Absolute Value
گۆشەی جەمسەری Argument
شێوەی جەبری Algebraic Form
شێوەی سێگۆشەیی Trigonometric Form
شێوەی جەمسەری Polar Form

لەپۆلی یازدەدا فێربوویت کە شیکارکردنی ئەو هاوکێشە دووجایانەی جیاکەرەوەکانیان سالبە، پێویستیان بە جۆرێکی نوێ لە ژمارەکان هەیە ئەویش **ژمارە ئاوێتەکانە**. هەروەها فێربوویت هەر ژمارەیەکی ئاوێتە بەشێوەی $z = x + iy$ و تەنها بەو شێوەیە دەنووسرێت، کاتێك x و y دوو ژمارە ڕاستیین و i ژمارەیەکی خەیاڵییە پاسادانی $i^2 = -1$ دەکات.

لەمەوە دەردەچێت هەر ژمارەیەکی ئاوێتە $z = x + iy$ جووتە ڕێکخراوێکی وەك (x, y) دیاریدەکات کە لە دوو ژمارەی ڕاستی پێکهاتووە و بەخاڵێکی وەك $M(x, y)$ لە ڕووتەختی پۆوتاندا دەنوێنرێت بەم خاڵەش دەوترێت خاڵی ژمارە ئاوێتەی z وبەشێوەی M_z دەنووسرێت. لەلایەکی ترەوە هەر خاڵێکی وەك $A(a, b)$ لە ڕووتەختی پۆوتانەکان وەك جووتە ڕێکخراوی (a, b) دیاریدەکات ولە کۆتاییدا ژمارەیەکی ئاوێتەی وەك $u = a + ib$ پێکدەهێنێت وبەم ژمارەیە دەوترێت ژمارەی خاڵی ئاوێتەی A بە شێوەی z_A دەنووسرێت.

شێوەی جەبری

شێوەی جەبری ژمارەی ئاوێتەی z بەشێوەی $z = x + iy$ دەنووسرێت، کاتێك x و y دوو ژمارەی ڕاستیین و i ژمارەیەکی خەیاڵییە و پاسادانی $i^2 = -1$ دەکات و هەروەها لەپۆلی یازدەدا فێربوویت کە z تەنها بەیەك ڕێگا دەنووسرێت، بە x دەوترێت **بەشی ڕاستی** z و دەنووسرێت $R(z)$ و بە y دەوترێت **بەشی خەیاڵی** z و دەنووسرێت $I(z)$.

هەموو ژمارەیەکی ئاوێتە $z = a + ib$ ژمارەیەکی ئاوڵی هەیە $\bar{z} = a - ib$ ($\bar{z}$ **ئاوڵی ژمارەی** z)
تێبینی ئەوە بکە بەشی ڕاستی هەردوو ژمارەی z و $\bar{z}$ یەکسانن $R(\bar{z})=R(z)$ وهەر دوو بەشی خەیاڵی لەنیشانەدا پێچەوانەی یەکترن $I(\bar{z})=-I(z)$

نموونـــــه 1

دۆزینەوەی بەشی ڕاستی وبەشی خەیاڵی ژمارەی ئاوێتە

ژمارەی ئاوێتەی $z = \frac{1-2i}{1+2i}$ بەشێوەی جەبری بنووسە و بەشی ڕاستی و خەیاڵی بدۆزەوە.

شیکار

$$z = \frac{1-2i}{1+2i} = \frac{(1-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$ سەرەو ژێرە لەئاوڵی ژێرە بدە، بۆ ئەوەی لە i ی ژێرە ڕزگاربێت.

$$z = \frac{1-2i-2i+4i^2}{1-4i^2} = \frac{1-4i-4}{1+4} = \frac{-3-4i}{5} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

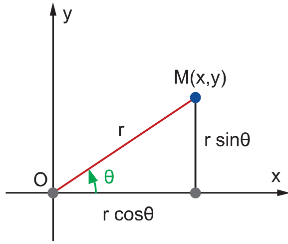
بەشی ڕاستی z دەکاتە $R(z) = -\frac{3}{5}$ وبەشی خەیاڵی $I(z) = -\frac{4}{5}$.



1. ژمارەی $z = (2-3i)(5i-4)(-7(i-1))$ بەشێوەی جەبری بنووسە و بەشی ڕاستی و خەیاڵی بدۆزەوە.

لەگەڵ شێوەی جەبری ژمارەی ئاوێتە، شێوەی سێگۆشەیی و شێوەی جەمسەری هەیە، کە بۆ شیکارکردنی زۆر لە پرسیارەکان بەچەندەها ڕێگای کورت بەکاردەهێنرێن.

شێوەی سێگۆشەیی



لەشێوەی بەرامبەردا M خاڵی ژمارەی ئاوێتەی $z = x + iy$ ، $(z \neq 0)$
ئەم خاڵە ژمارەیەکی موجەب r دەنوێنێت کە دەکاتە دووری نێوان M
و خاڵی بنەڕەت 0 ، لەگەڵ ژمارەیەکی ڕاستی تر کە بریتییە لە پێوانەی
گۆشەی ئاڕاستەکراوی θ (بەڕادیان) کە تیشکی OM لەگەڵ نیوەی
موجەبی تەوەری x پێکدەهێنێت. بەژمارەی یەکەم دەوترێت بەهای
ڕووتی z و بە $|z|$ هێما دەکرێت و بەژمارەی دووەم دەوترێت گۆشەی
جەمسەری ژمارە z و بە $\arg(z)$ هێمادەکرێت.

تێبینی ئەوە بکە کە بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتە دیاریکراوە بە بێ هیچ ئاڵۆزییەك بەڵام
دیاریکردنی گۆشەی جەمسەری هەندێك ئاڵۆزی دروست دەکات. بۆ نموونە: ئەگەر $\frac{\pi}{3}$ پێوانەی گۆشەی
جەمسەری z بێت، ئەوا $\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ کاتێك n ژمارەیەکی تەواوە، پێوانەیەکی تری گۆشەکەیە، ئەوەش
وامان لێ دەکات کە باس لە گۆشەیەکی جەمسەری ژمارەی ئاوێتە بکەین نەك باس لە گۆشە
جەمسەرییەکەی ژمارەیەکی ئاوێتە بکەین.

ئەگەر بگەڕێینەوە بۆ وێنەی سەرەوە، دەتوانین بنووسین: $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ و
لەدوایدا $z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

شێوەی سێگۆشەیی ژمارەی ئاوێتە

شێوەی سێگۆشەیی ژمارەی ئاوێتە $z = x + iy$ $(z \neq 0)$ دەکاتە $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
کاتێك $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

نموونـــە 2 نووسینی ژمارەی ئاوێتە بەشێوەی سێگۆشەیی

ژمارەی $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ بەشێوەی سێگۆشەیی بنووسە.

شیکار

دەست بە دۆزینەوەی بەهای ڕووتی ژمارەکە بکە.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

گۆشەی جەمسەری بدۆزەوە.

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ بەمەش $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$، چونکە خاڵی M_z دەکەوێتە چارێکی
یەکەم لە ڕووتەختی پۆوتانەکان.

شێوەی سێگۆشەیی بۆ ژمارە ئاوێتەی z بریتییە لە $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$



2. ژمارە ئاوێتەی $z = 2\sqrt{3} + 2i$ بەشێوەی سێگۆشەیی بنووسە.

شێوەی سێیەم بۆ نووسینی ژمارەی ئاوێتە پێی دەوترێت شێوەی جەمسەری (هەندێك جار پێی
دەوترێت شێوەی توانی) ئەوەش کورتکراوەی کرداری شێوەی سێگۆشەییە.

شێوەی جەمسەری

ئەوانەی لەبواری بیرکاری کاردەکەن پێناسەی $e^{i\theta}$ بەم شێوەیە دەکەن $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ئەمەش ڕێگا دەدات هەر ژمارەیەکی ئاوێتەی $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ جیاواز بێت لەسفر بەشێوەی $z=re^{i\theta}$ بنوسرێت. ئەم نووسینە پێی دەوترێت شێوەی جەمسەری ژمارە ئاوێتەی z لەوانەیە پرسیار لە پەیوەندییەك لەنێوان $e^{i(\theta+\theta')}$ و هەریەکە لە $e^{i\theta}$ و $e^{i\theta'}$ بکەیت ئایا پەیوەندیەك هەیە لەنێوان ئەم نووسینانە و پەیوەندی $e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}e^{i\theta'}$ وەك لە توانەکاندا هەیە کاتێك $a^{x+y}=a^x a^y$ ؟

وەڵام بۆ ئەم پرسیارە بەڵێیە و دەتوانین بەم شێوەیە بیسەلمێنین.

$$\begin{aligned}e^{i\theta}e^{i\theta'}&=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')\\&=\cos\theta\cos\theta'+i\cos\theta\sin\theta'+i\sin\theta\cos\theta'+i^2\sin\theta\sin\theta'\\&=\cos\theta\cos\theta'+i\cos\theta\sin\theta'+i\sin\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'\\&=\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'+i(\cos\theta\sin\theta'+\sin\theta\cos\theta')\\&=\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')=e^{i(\theta+\theta')}\end{aligned}$$

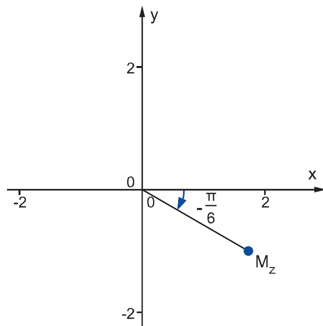
شێوەی جەمسەری ژمارەی ئاوێتە

شێوەی جەمسەری ژمارەی ئاوێتەی $z=x+iy$ $(z\neq 0)$ بریتییە لە $z=re^{i\theta}$

کاتێك $r=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\tan\theta=\frac{y}{x}$.

نموونـــــە 3

نووسینی ژمارەی ئاوێتە بەشێوەی جەمسەری



ژمارەی $z=\sqrt{3}-i$ بەشێوەی جەمسەری بنووسە.

شیکار

دەست بە دۆزینەوەی بەهای ڕووتی ژمارەکە بکە.

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

گۆشەی جەمسەری ژمارەکە بدۆزەوە.

$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-1}{\sqrt{3}}$، بەمەش $\theta=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ لەبەرئەوەی خاڵی M_z دەکەوێتە چارێکی چوارەم لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا.

شێوەی جەمسەری ژمارەی ئاوێتەی z دەکاتە $z=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.



3. ژمارە ئاوێتەی $z=-2+2i$ بە شێوەی جەمسەری بنووسە.

سیفەتەکانی بەهای ڕووت و گۆشەی جەمسەری ژمارەی ئاوێتە

أ $|z|\geq 0$ و $|z|=0$ ئەگەر وتەنها ئەگەر $z=0$.

ب $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ و $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$.

ج $|-z|=|z|$ و $|\bar{z}|=|z|$.

د $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

أ $\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)+2k\pi$

ب $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)+2k\pi$

ج $\arg(z^n)=n\arg(z)+2k\pi$

د $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)+2k\pi$

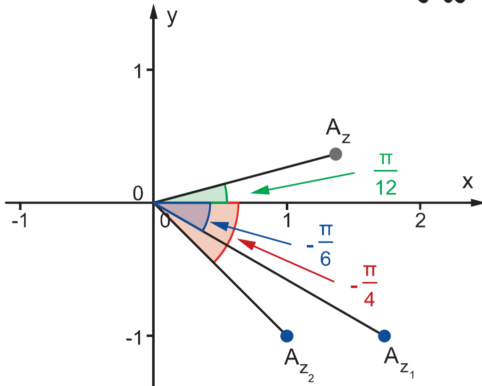
نموونـــه 4 بەکارهێنانی سیفەتەکانی بەهای ڕووت و گۆشەی جەمسەری

بەهای ڕووت و گۆشەی جەمسەری هەریەکە لەم ژمارە ئاویّتانە بدۆزەوە.

أ $z_1 = \sqrt{3} - i$ ب $z_2 = 1 - i$ ج $z = \frac{z_1}{z_2}$

پاشان بەهای هەریەکە لە $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$ بدۆزەوە.

شیکار



بەهای ڕووتی هەر ژمارەیەك هەژماربکە.

$$|z_1| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

$$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

گۆشەی جەمسەری هەر ژمارەیەك بدۆزەوە.

$\tan\theta_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \arg(z_1) = \theta_1 = -\frac{\pi}{6} + 2m\pi$ چونکە خاڵی z_1 دەکەوێتە چارێکی چوارەم.

$\tan\theta_2 = -1 \Rightarrow \arg(z_2) = \theta_2 = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$ چونکە خاڵی z_2 دەکەوێتە چارێکی چوارەم.

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = -\frac{\pi}{6} + 2m\pi - \left(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) = \frac{\pi}{12} + 2(m-n)\pi$$

ژمارەی z بەشێوەی سێگۆشەیی بەم جۆرە دەنووسرێت $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

بۆ دۆزینەوەی بەهای هەریەکە لە $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$، ژمارەی z بەشێوەی جەبری بنووسە.

لەوەوە دەردەچێت کە $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}-i}{1-i} = \frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i = z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}$$

کەواتە، $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.



4. بەهای ڕووت و گۆشەی جەمسەری هەریەکە لەم ژمارانە بدۆزەوە.

أ $z_1 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ ب $z_2 = 1 + i$ ج $z = \frac{z_1}{z_2}$

پاشان بەهای هەریەکە لە $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$ بدۆزەوە.

سەلمێنراوی 1-7 De Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

ئەم سەلمێنراوە سوودێکی گەورەی هەیە بۆ سادەکردنی هەندێك لە برە جەبرییەکان، هەروەها بەکاردەهێنرێت لە سێگۆشەزانی چونکە یارمەتیدەرە بۆ سەلماندنی زۆر لە هاوئەنجامەکان.

نموونــــــه 5

جێبەجێکردن لە سێگۆشەزانی

ئەم برە $\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^4$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

شیکار

$$\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^4 = \cos4\frac{\pi}{12}+i\sin4\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



5. بڕی $\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right)^6$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

نموونــــــه 6

دۆزینەوەی هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان

دوو هاوئەنجام بدۆزەوە بۆ نووسینی $\cos 3\theta$ و $\sin 3\theta$ بەپێی $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

شیکار

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta+3\cos^2\theta(i\sin\theta)+3\cos\theta(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3$$
$$= \cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta$$

بەڵام

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3 = \cos3\theta+i\sin3\theta$$

بەپشت بەستن بە سەلمێنراوی De Moivre دەردەچێت:

$$\cos3\theta+i\sin3\theta = \cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)$$

لەمەش

$$\sin3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta \quad \text{و} \quad \cos3\theta = \cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$$



6. دوو هاوئەنجام بدۆزەوە بۆ نووسینی $\cos2\theta$ و $\sin2\theta$ بەپێی $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

ڕەگەکانی یەک

دەزانیت یەک دوو ڕەگی دووجای هەیە ئەویش 1 و -1 و یەک ڕەگی سێجای هەیە ئەویش 1، ئەمە ڕاستە بۆ کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان بەڵام ئەگەر فراوانبکرێت بۆ کۆمەڵەی ژمارە ئاوێتەکان دەبینیت کە یەک سێ ڕەگی سێجای هەیە.

ڕەگەکانی یەک

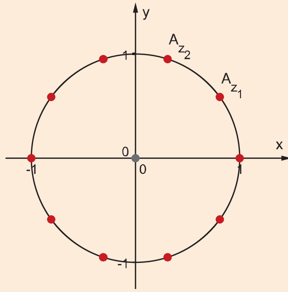
بە ژمارە ئاوێتەی $z = re^{i\theta}$ دەوترێت ڕەگی یەک لەپلەی n کاتێک n ژمارەیەکی تەواوی موجەبە ئەگەر پاسادانی $z^n = 1$ بکات.

ئەگەر هاوکێشەی $z^n = 1$ بە بەکارهێنانی شێوەی جەمسەری بۆ دوو ژمارەی z و 1 نووسراوبێت. ئەوا $z^n = r^n e^{in\theta} = 1 = 1\times e^{i\times0}$ دەستدەکەوێت.

لەوەش دەردەچێت $\begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = 0+2k\pi \end{cases}$ پاشان $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$

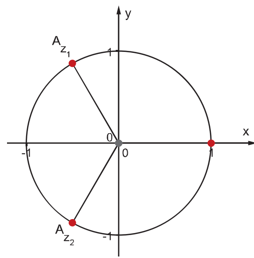
هەر بەهایەك بدەیتە k ڕەگێك بۆ یەك لە پلە n دیاریدەکات.

سەلمێنراوی 7–2 ڕەگەکانی یەک



ئەگەر n هەر ژمارەیەکی تەواوی موجەب بێت ئەوا یەک n ڕەگی پلە n ی هەیە. ئەم ڕەگانە سەرەکانی چەند لایەکی ڕێک پێکدەهێنێت و هەموویان دەکەونە سەر بازنەی یەکە.

نموونــــــه 7 ڕەگە سێجاکانی یەک



ڕەگە سێجاکانی یەک بدۆزەوە و خاڵەکان لە ڕووتەختی پۆوتاندا دیاریبکە.

شیکار

ژمارە یەک سێ ڕەگی سێجای هەیە ئەمانەن:

$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ و $z_3 = e^{i\frac{6\pi}{3}} = e^{2i\pi} = 1$.

ئەوانەی لەبواری بیرکاری کاردەکەن هێمایەکی تایبەت j بۆ ڕەگی سێجای $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ بەکاردەهێنن.

دەتوانیت بە ئاسانی دەریبخەیت کە $\bar{j} = j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = z_2$.



7. ڕەگەکانی یەک لەپلە 4 بدۆزەوە وخاڵەکانی لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا دیاریبکە.

1–7 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تا 12 ژمارە ئاوێتەکە بەشێوەی جەبری بنووسە.

1. $(1+i)^2$
2. $(1-i)^2$
3. $(1+3i)^2$
4. $(1-3i)^2$
5. $(1+i)^3$
6. $(1-i)^3$
7. $(3+4i)(3-4i)$
8. $(3+2i)^3$
9. $\frac{i-5}{3+5i}$
10. $\frac{3+i}{2-i}+\frac{2-i}{3+i}$
11. $\frac{i-4}{2+5i}+\frac{2+3i}{1-i}$
12. $\frac{4+5i}{2-i}+\frac{1-3i}{1+i}$

لە ڕاهێنانی 13 تا 20 هەر ژمارەیەکی ئاوێتە بەشێوەی سێگۆشەیی و جەمسەری بنووسە.

13. $z=1+i$
14. $z=1-i$
15. $z=i$
16. $z=9i$
17. $z=-6$
18. $z=8$
19. $z=1+i\sqrt{3}$
20. $z=1-i\sqrt{3}$

لە ڕاهێنانی 21 تا 25 ژمارە ئاوێتەکە بەشێوەی جەمسەری بنووسە ئەگەر زانیت $z = re^{i\theta}$.

21 $\frac{1}{z}$ 22 $\bar{z}$ 23 iz 24 z^3 25 $\frac{ie^{i\alpha}}{z^2}$

26 هەریەك لەم دوو ژمارە ئاوێتانە بە شێوەی جەمسەری بنووسە.

أ $z = \left(1-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}$ ب $z = 1+\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}$

27 بیسەلمێنە: $|z| = |-z|$ و $|z| = |\bar{z}|$.

28 بیسەلمێنە $|z|^2 = z\bar{z}$ ئەم ئەنجامە بەکاربهێنە بۆ سەلماندنی $|zz'| = |z||z'|$.

29 بیسەلمێنە $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

30 بیسەلمێنە $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

31 ژمارە ئاوێتەکانی z بدۆزەوە کە پاسادانی $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1+z|$ دەکات.

32 ژمارە ئاوێتەکانی z بدۆزەوە کە پاسادانی $\left|z^2\right| = |\bar{z}| = |1-z|$ دەکات.

لە ڕاهێنانی 33 تا 36 ژمارە ئاوێتەکە بەشێوەی سێگۆشەیی بنووسە کاتێك.

33 $z = \sin\alpha + i\cos\alpha$ 34 $z = \cos\alpha - i\sin\alpha$

35 $z = -\cos\alpha - i\sin\alpha$ 36 $z = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha}$

37 وەڵامی ئەمانەی خوارەوە بدەوە ئەگەر زانیت $j = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

أ j بە شێوەی جەمسەری بنووسە ودەریبخە کە ئەم ژمارە ڕەگی سێجایە بۆ یەك.

ب j^2 بدۆزەرە، و دەریبخە کە ڕەگی سێجای ناڕاستییە بۆ یەك و جیاوازە لە j.

ج دیاریبکە کە $j^{3m} = 1$ و $j^{3m+1} = j$ و $j^{3m+2} = j^2 = \bar{j}$ و $1 + j + j^2 = 0$.

دەربارەی چەمکەکان

38 بەڕای تۆ ژمارەی ڕەگەکانی یەك لە پلە n دەکاتە چەند؟ ڕوونیبکەوە.

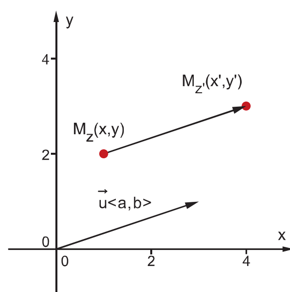
2-7 ژماره ئاوێتەکان و ئەندازە
Complex Numbers and Geometry

ئامانجەکان
- کردارەکان لەسەر ژمارە ئاوێتەکان بەئەندازەیی لێکدەداتەوە.
- بە بەکارهێنانی ژمارە ئاوێتەکان شیکاری پرسیاری ئەندازەیی دەکات.

زاراوەکان
Vocabulary
ژمارەی خاڵ
Affix of the point
خاڵی ژمارەی ئاوێتە
Point of the complex number
ژمارەی ئاراستەبڕ
Affix of the vector
ئاراستەبڕی ژمارەی ئاوێتە
Vector of the complex number
شێوەی ئاوێتە Complex form

لەوانەی پێشوو فێربوویت کە خاڵەکانی ڕووتەخت و ژمارە ئاوێتەکان بەرامبەر یەکترن، واتە هەر خاڵێك $M(x, y)$ ژمارەیەکی ئاوێتەی تاکانە $z_M = x+iy$ دیاریدەکات پێدەوترێت ژمارەی خاڵی $M(x, y)$ و هەر ژمارەیەکی ئاوێتە $z = x+iy$ خاڵێکی تاکانە $M_z(x, y)$ دیاریدەکات پێیدەوترێت خاڵی ژمارە ئاوێتەی $z = x+iy$ لەلایەکی تر هەر ئاراستەبڕێکی وەك $\vec{u}\langle a, b\rangle$ ژمارەیەکی ئاوێتە $z_{\vec{u}} = a+ib$ دیاریدەکات پێدەوترێت ژمارەی ئاراستەبڕ، هەروەها هەر ژمارەیەکی ئاوێتە $z = p+iq$ ئاراستەبڕێکی وەك $\vec{v}_z\langle p, q\rangle$ دیاریدەکات پێدەوترێت ئاراستەبڕی ژمارەی $z = p+iq$، بەرامبەربوون لە نێوان ژمارە ئاوێتەکان لەلایەك و خاڵەکانی ڕووتەخت و ئاراستەکانی لەلایەکی تر ڕێگا دەدات بەنواندنی کردارەکان لەسەر ژمارە ئاوێتەکان بەئەندازەیی هەروەها ڕێگا دەدات بەدەربڕینی بارە ئەندازەییەکان ئەمە لەم وانەیەدا فێردەبیت.

کۆکردنەوەی ژمارە ئاوێتەکان

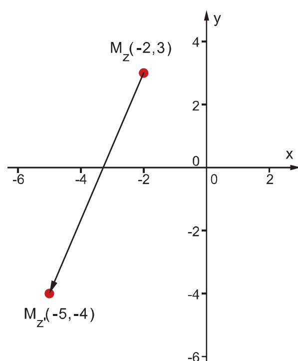


با $u = a+ib$ ژمارەیەکی ئاوێتە و $\vec{u}\langle a, b\rangle$ ئاراستەبڕەکەی بێت، ئەگەر ژمارەی u لەگەڵ ژمارەی ئاوێتە $z = x+iy$ کۆبکەیتەوە ئەوا ژمارەیەکی ئاوێتەی ترت دەستدەکەوێت.
$$z' = z+u = (x+iy)+(a+ib) = (x+a)+i(y+b)$$
ئەگەر $M(x, y)$ خاڵی ژمارە ئاوێتەی z بێت و $M'(x', y')$ خاڵی ژمارە ئاوێتەی z' بێت، ئەوا $\begin{cases} x' = x+a \\ y' = y+b \end{cases}$
دەسەلمێنێت کە M' دەبێتە وێنەی M.
بەڕاکێشانی ئاراستەبڕی $\vec{u}\langle a, b\rangle$.

لێکدانەوەی ئەندازەیی بۆ کۆکردنەوەی ژمارە ئاوێتەکان

کۆکردنەوەی دوو ژمارەی ئاوێتە u و z خاڵی ژمارەی z دەگۆڕێت بەڕاکێشانی ئاراستەبڕی $\vec{u}$.

نموونە 1
دۆزینەوەی ئاراستەبڕی ڕاکێشان



ئاراستەبڕی ئەو ڕاکێشانەی کە خاڵی ژمارەی $z = -2+3i$ دەگۆڕێت بۆ خاڵی ژمارەی $z' = -5-4i$ بدۆزەوە.

شیکار

ئەگەر $\vec{u}\langle a, b\rangle$ ئاراستەبڕی ڕاکێشان بێت کە M_z بۆ $M_{z'}$ دەگۆڕێت ئەوا: $\begin{cases} -5 = (-2)+a \\ -4 = (3)+b \end{cases}$ لەدواییدا $a = -3$ و $b = -7$.

ئاراستەبڕی $\vec{u}\langle a, b\rangle$ دەکاتە $\vec{u}\langle -3, -7\rangle$.

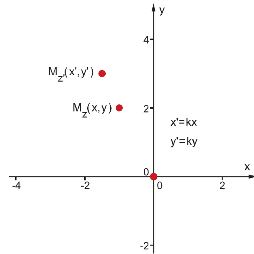


1. ئاراستەبری ڕاکێشان کەخاڵی ژمارەی ئاوێتەی $z = 6 - 2i$ دەگۆڕێت بۆ خاڵی ژمارەی ئاوێتەی $z' = 6 + 4i$ بدۆزەوە.

لێکدانی ژمارەیەکی ئاوێتە لە ژمارەیەکی ڕاستی

با $z = x + iy$ ژمارەیەکی ئاوێتە بێت و k ژمارەیەکی ڕاستی بێت، ئەگەر z لە k درا، ئەوا ژمارەیەکی ئاوێتەت دەستدەکەوێت: $z' = kz = k(x + iy) = (kx) + i(ky)$

ئەگەر $M_z(x, y)$ خاڵی ژمارەی ئاوێتەی z بێت و $M'_{z'}(x', y')$ خاڵی ژمارەی ئاوێتەی z' بێت ئەوا:



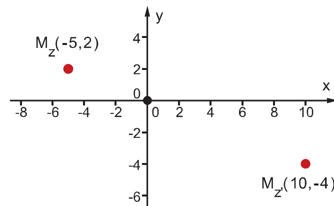
$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = kx \end{cases}$$ ئەمەش دەیسەلمێنێت کە $M'_{z'}$ بریتییە لە وێنەی M_z بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و ڕێژەکەی k بێت.

لێکدانەوەی ئەندازەیی بۆ لێکدانی ژمارەیەکی ئاوێتە لە ژمارەیەکی ڕاستی

لێکدانی ژمارە ئاوێتەی z لە ژمارەیەکی ڕاستی k دەبێتە هۆی گۆڕانی خاڵی ژمارەی z بە هاوڕێژەییەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و ڕێژەکەی k بێت.

نموونـــــە 2

دۆزینەوەی ڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەیی



ڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت چەندە کە خاڵی ژمارەی ئاوێتەی $z = -5 + 2i$ بۆ خاڵی ژمارەی ئاوێتەی $z' = 10 - 4i$ دەگۆڕێت.

شیکار

ئەگەر $M_z(x, y)$ و $M'_{z'}(x', y')$ دوو خاڵی ژمارە ئاوێتەی z و z' بن و k ڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەیی بێت چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت و M_z بۆ $M'_{z'}$ بگۆڕێت، ئەوا

$$\begin{cases} 10 = k(-5) \\ -4 = k(2) \end{cases}$$ لەمەوە دەردەچێت $k = -2$.



2. **ڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەیی بدۆزەوە کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت و خاڵی ژمارە ئاوێتەی $z = 6 - 2i$ بۆ خاڵی ژمارە ئاوێتەی $z' = 3 - i$ دەگۆڕێت.**

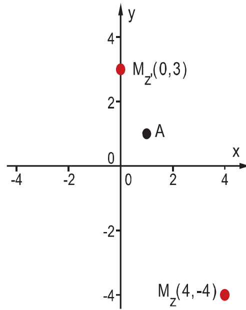
بە سوود وەرگرتن لەوەی پێشوو ئەوا گۆڕینی خاڵی M بە هاوڕێژەییەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و ڕێژەکەی ژمارەی ڕاستی k بێت، دەگەڕێتەوە بۆ لێکدانی z_M، ژمارەی خاڵی M لە ژمارە ڕاستی k ودیارکردنی خاڵی ژمارە ئاوێتەی ئەنجام $z' = kz$ بەدوا نووسینی $z' = kz$ دەوترێت شێوەی ئاوێتە بۆ ئەم هاوڕێژە ئەندازەییە. شێوەی ئاوێتە بۆ هاوڕێژەییەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی A و ڕێژەکەی ژمارەی ڕاستی k بێت چەندە؟

نووسینی ئاوێتە بۆ هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی

نووسینی ئاوێتە بۆ هاوڕێژەییەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی A و ڕێژەکەی ژمارەی ڕاستی k بێت دەکاتە $z' - a = k(z - a)$ کاتێک $a = z_A$ ژمارەی ئاوێتەیە بۆ خاڵی A.

نموونــــه 3

دۆزینەوەی وێنەی خاڵێك بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی



شێوەی خاڵی $M(3,-3)$ بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی $A(1,1)$ و ڕێژەکەی ژمارەیەکی ڕاستی $-\frac{1}{2}$ بێت بدۆزەوە.

شیکار

کاتێك $a=z_A=1+i$ و $m=z_M=3-3i$ وێنەی M' وێنەی M بە هاوڕێژەی ئەندازەیی و $m'=z_M$, ئەوا $m'-a=-\frac{1}{2}(m-a)$

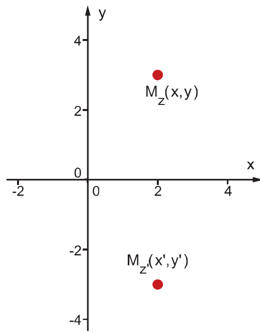
$$m'=-\frac{1}{2}(m-a)+a=-\frac{1}{2}\big(3-3i-(1+i)\big)+(1+i)=3i$$

کەواتە وێنەی خاڵی $M(3,-3)$ بەهاوڕێژەی ئەندازەیی دەبێتە خاڵی $M'(0,3)$.



3. وێنەی پێشوو بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی وێنەی خاڵی $M(4,-4)$ بە هاوڕێژەی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی $A(-1,-1)$ وڕێژەکەی ژمارەی ڕاستی $-\frac{1}{4}$ بێت.

ژمارەی ئاوڵ



لەبیرت بێت ژمارە ئاوێتەی $z=x+iy$ ئاوڵی ژمارەی $\overline{z}=x-iy$ ئەگەر $M_z(x,y)$ خاڵی ژمارەی ئاوێتەی z و $M_{z'}'(x',y')$ خاڵی ژمارە ئاوێتەی $\overline{z}$ بێت،

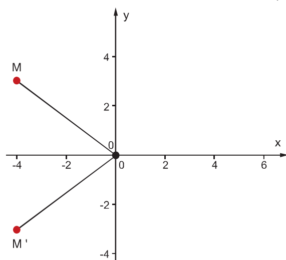
ئەوا $\begin{cases}x'=x\\y'=-y\end{cases}$ دەیسەلمێنێت کە $M_{z'}'$ وێنەی M_z بە وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x.

لێکدانەوەی ئەندازەیی بۆ ژمارەی ئاوڵ
گواستنەوە لە ژمارەی ئاوێتە z بۆ ئاوڵەکەی $\overline{z}$ خاڵی ژمارە z بە وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x جێگۆڕکێ دەکات.

نموونــــه 4

شێوەی خاڵی ژمارەی ئاوێتە بە وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x

وێنەی خاڵی ژمارەی ئاوێتەی $z=-5(2-i)-2i(3i+1)$ بە وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x بدۆزەوە.



شیکار

دەستبکە بە نووسینی ژمارە ئاوێتەکە بەشێوەی جەبری

$$z=-5(2-i)-2i(3i+1)=-10+5i-6(i^2)-2i$$

$$z=-4+3i$$

دەکاتە خاڵی ژمارە ئاوێتەی z و خاڵی $M_z(-4,3)$ ، $M'_{z'}(-4,-3)$ وێنەی خاڵەکەیە بە وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x.

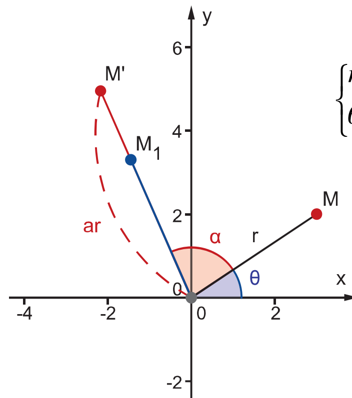


4. وێنەی خاڵی ژمارەی ئاوێتەی $z=3(-7i+14)(8-11i)$ بە وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x بدۆزەوە.

لێكدانی ژمارە ئاوێتەكان «بۆ تێڕوانین»

لێكدانەوەی ئەندازەیی بۆ لێكدانی دوو ژمارەی ئاوێتە زۆر ئاڵۆزترە لە لێكدانەوەكانی پێشوو، لێرەدا شێوەی سێگۆشەیی بەكاردەهێنین بۆ نووسینی ژمارە ئاوێتەكان چونكە گەیشتن بە ئەنجام ئاسانتر دەكات. با $u= a^{ia}$ ژمارەیەكی ئاوێتە بێت بەهای ڕووتەكەی a و θ گۆشە جەمسەرییەكەی بێت. ئەگەر u لەژمارەی ئاوێتەی $u= a^{ia}$ بدەیت ئەمەت دەستدەكەوێت.

$$z' = zu = re^{i\theta} ae^{i\alpha} = (ra)e^{i(\theta+\alpha)}$$



با M_z و M'_z دوو خاڵی ژمارە ئاوێتەی z و z' بن، ئەوا $\begin{cases} r' = ar \\ \theta' = \theta + \alpha + 2k\pi \end{cases}$ كاتێك $z' = r'e^{i\theta'}$. ئەگەر بەوردی سەیری وێنەی بەرامبەر بكەیت دەبینیت جێگۆڕكێ لە M_z و $M'_{z'}$ بە دوو قۆناغدا تێدەپەڕێت: یەكەمیان M_z بۆ M_1 بە سوڕانەوەیەك چەقەكەی خاڵی بنەڕەت وگۆشەكەی $\alpha = \arg(u)$ و دووەمیان لە M_1 بۆ $M'_{z'}$ بەهاوڕێژەی ئەندازەیی چەقەكەی خاڵی بنەڕەت وڕێژەكەی $a = |u|$ بێت. «ڕووتی ژمارەی ئاوێتەی u»

لێكدانەوەی ئەندازەیی بۆ لێكدانی ژمارە ئاوێتەكان

لێكدانی ژمارەی ئاوێتە z لە ژمارەی ئاوێتەی u بریتییە لە جێگۆڕكێی خاڵی ژمارە z بەسووڕانەوە چەقەكەی خاڵی بنەڕەت وگۆشەكەی $\arg(u)$ بێت، پاشان بە هاوڕێژەی ئەندازەیی چەقەكەی خاڵی بنەڕەت وڕێژەكەی $|u|$ بێت.

نموونـــــە 5

جێگۆڕكێی خاڵ بەبەكارهێنانی لێكدانی ژمارە ئاوێتەكان

دیاریبكە كە دەتوانرێت ژمارە ئاوێتەی $z = 1 + i$ جێگۆڕكێی بكەیت بۆ خاڵی ژمارە ئاوێتەی $z' = 2\sqrt{2}(1-i)$ بە سووڕانەوە چەقەكەی خاڵی بنەڕەت پاشان بە هاوڕێژەی ئەندازەیی چەقەكەی خاڵی بنەڕەت. گۆشە سوڕانەوەو ڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەیی چەندە؟

شیكار

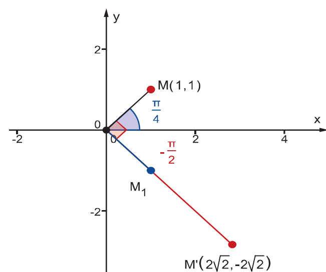
دۆزینەوەی ژمارەیەكی ئاوێتە u بەسە بۆ ئەوەی z' دەستكەوێت ئەویش بەهۆی لێكدانی z لە u لەبەرئەوەی u پێویستە پاسادانی $z' = uz$ بكات و لەبەرئەوەی $z \neq 0$ ئەوا $u = \frac{z'}{z}$.

شێوەی جەمسەری بەكاربهێنە بۆ نووسینی ژمارەی ئاوێتەكە.

$z = re^{i\theta}$ و $z' = r'e^{i\theta}$ بنووسە، پاشان بەهای ڕووت وگۆشەی هەردوو ژمارەی z و z' بدۆزەوە.

$|z| = |1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$؛ $\tan\theta = \frac{1}{1} = 1$ و $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

ئەمەش ئەوە دەگەیێنێت $\theta = \frac{\pi}{4} + 2m\pi$



$|z'| = |2\sqrt{2}(1-i)| = 2\sqrt{2}|1-i| = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}) = 4$؛

$\tan\theta' = \frac{-1}{1} = -1$ و $0 \le \theta' \le -\frac{\pi}{2}$

ئەمەش ئەوە دەگەیێنێت $\theta' = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$

بەهای ڕووتی u بدۆزەوە، $|z'| = |z||u|$ لەمەوەش $|u| = \frac{|z'|}{|z|} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

هەروەها $\arg(z') = \arg(u) + \arg(z)$.

لەدواییدا

$$\arg(u)=\arg(z')-\arg(z)=\theta'-\theta=-\frac{\pi}{4}+2n\pi-\frac{\pi}{4}-2m\pi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

کاتێك $k=n-m$

کەواتە، گۆشەی سوڕانەوە دەکاتە $-\frac{\pi}{2}$ وڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەیی دەکاتە $2\sqrt{2}$.



5. دیاریبکە کە دەتوانرێت خاڵی ژمارەی $z=1-i$ بۆ خاڵی ژمارەی $z'=\sqrt{2}(1+i)$ جێگۆڕکێ بکرێت بە سوڕانەوەیەك چەقەکەی خاڵی بنەڕەت، پاشان بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت، گۆشەی سوڕانەوە و ڕێژەی هاوڕێژەیی ئەندازەیی بدۆزەوە.

بەسوود وەرگرتن لەوەی پێشوو، دەتوانیت جێگۆڕکێی خاڵی M بکەیت بە سووڕانەوەیەك چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت، لەڕێگای لێکدانی ژمارەی خاڵی M لە ژمارەیەکی ئاوێتە بەهای ڕووتەکەی 1 بێت.
بەواتایەکی تر بۆ جێگۆڕکێی خاڵی M بە سووڕانەوە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و گۆشەکەی θ بێت،
ژمارە ئاوێتەی $m=z_M$ «ژمارەی خاڵی M » لە ژمارە ئاوێتەی $e^{i\theta}$ بدە. (1 بەهای ڕووتی ژمارەکەیە و θ گۆشەی جەمسەرەکەیەتی) خاڵی ژمارە ئاوێتەی دۆزراوە دەکاتە $z'=e^{i\theta}z$ بە نووسینی $z'=e^{i\theta}z$
دەوترێت **شێوەی ئاوێتە** Complex form بۆ سوڕانەوە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت وگۆشەکەی θ بێت.

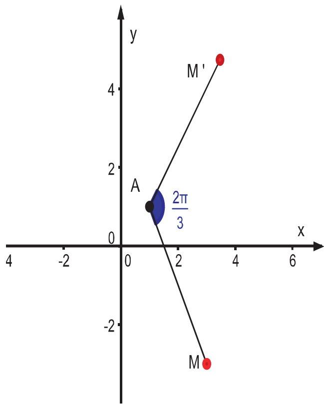
شێوەی ئاوێتە بۆ سووڕانەوە «بۆ تێڕوانین»

نووسینی ئاوێتە بۆ سووڕانەوە چەقەکەی خاڵی A وگۆشەکەی θ بێت دەکاتە: $z'-a=e^{i\theta}(z-a)$
کاتێك $a=z_A$ ژمارە ئاوێتەیە بۆ خاڵی A .

نموونــــــە 6

شێوەی خاڵێك بە سووڕانەوە

شێوەی خاڵی $M(3,-3)$ بە سووڕانەوە چەقەکەی خاڵی $A(1,1)$ و گۆشەکەی $\frac{2\pi}{3}$ بێت بدۆزەوە.



شیکار

$a=z_A=1+i$ و $m=z_M=3-3i$ شێوەی M بە
سووڕانەوەی خاڵەکە $M'=M_{m'}$ کاتێك $m'-a=e^{i\theta}(m-a)$

$$m'=e^{i\frac{2\pi}{3}}(3-3i-(1+i))+(1+i)$$
$$=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)(2-4i)+1+i$$
$$=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2-4i)+1+i=2\sqrt{3}+i\left(3+\sqrt{3}\right)$$

شێوەی خاڵی $M(3,-3)$ بە سووڕانەوە دەبێتە خاڵی $M'=\left(2\sqrt{3},\ 3+\sqrt{3}\right)$.



6. شێوەی خاڵی $M(4,-4)$ بدۆزەوە بە سووڕانەوە چەقەکەی $A(-1,-1)$ و گۆشەکەی $-\frac{\pi}{4}$ بێت.

دەتوانین سوود لە پەیوەندی نێوان ژمارە ئاوێتەکان و خاڵەکانی ڕووتەختی پۆوتانەکاندا وەربگرین بۆ شیکاری پرسیارە ئەندازەییەکان یان بۆ بەکارهێنانی هەندێك سەلمێنراو لەبواری ئەندازەیی.

2–7 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تاکو 6 ژمارە ئاوێتەکە بۆ شێوەی خاڵی M بەجێگۆڕکێی دیاریکراو بنووسە.

1. $M(2, -1)$؛ ڕاکێشانی ئاڕاستەبڕی $\vec{u}\langle -3, 2\rangle$
2. $M(-3, 5)$ ؛ ڕاکێشانی ئاڕاستەبڕی $\vec{u}\langle 2, -2\rangle$
3. $M(2, 0)$ ؛ سووڕانەوە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و گۆشەکەی $\frac{\pi}{3}$ بێت.
4. $M(2, 1)$ ؛ هاوڕێژەی ئەندازەیی ڕێژەکەی $\frac{3}{2}$ بێت.
5. $M(-1, 3)$؛ وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x .
6. $M(4, 1)$ ؛ وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری y

بــەشی
7
پێداچوونەوەی بەش

لە ڕاهێنانی 1 تا 5 ئەم ژمارە ئاوێتانە بەشێوەی جەبری بنووسە.

1 $\frac{3+6i}{3-4i}$

2 $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i}$

3 $\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}$

4 ژمارەیەکی ئاوێتە بەهای رووتی 2 و گۆشەی جەمسەری $\frac{\pi}{3}$ بێت.

5 ئاوێتەیەکی بەهای رووتی 3 و گۆشەی جەمسەری $-\frac{\pi}{6}$ بێت.

6 ئەم بڕەیە $(3+2i)(1-3i)$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

7 ژمارەیەکی ئاوێتە بەهایە ڕووتەکەی 2 و گۆشە جەمسەرەکەی $\frac{\pi}{3}$ بێت لەیەکێکی تر بدە کە بەهایە رووتەکەی 3 و گۆشە جەمسەرەکەی $\frac{-5\pi}{6}$.

8 بەسادەترین شێوە بڕی $\frac{3+2i}{1-3i}$ بنووسە.

9 ژمارەیەکی ئاوێتە بەهایە ڕووتەکەی 2 و گۆشە جەمسەرەکەی $\frac{\pi}{3}$ بێت دابەشی یەکێکی تر بکە بەهایە رووتەکەی 3 و گۆشە جەمسەرەکەی $\frac{-5\pi}{6}$ بێت.

10 بە جەمسەری هەریەکە لەم دوو ژمارە ئاوێتەیە $u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ و $v=1-i$ بنووسە پاشان لەسەر هەمان شێوە ژمارەی ئاوێتە $w=\frac{u}{v}$ بنووسە.

11 ژمارەی $\dfrac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}$ بەشێوەی جەبری بنووسە پاشان بەشێوەی سێگۆشەیی $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\tan\frac{\pi}{12}$ و $\tan\frac{5\pi}{12}$
بدۆزەوە شیکاری هاوکێشەی $z^{24}=1$ بکە.

بەشی 7

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە

1 بەشی ڕاستی ژمارە ئاوێتەی $z=(2+i)^2$ بریتییە لە:

أ 2　ب 4　ج 3　د 1

2 بەشی خەیاڵی ژمارە ئاوێتەی $z=(1-i)^2$ بریتییە لە:

أ -2　ب -1　ج 0　د $-2i$

3 بەهای ڕووتی ژمارە ئاوێتەی $z=4+3i$ بریتییە لە:

أ 7　ب $\sqrt{7}$　ج 5　د $\sqrt{5}$

4 کام لەم پێوانەی گۆشانەی دێن، گۆشەی جەمسەری ژمارە ئاوێتەی $z=2-2i$ بێت؟

أ $\frac{\pi}{4}$　ب $-\frac{\pi}{4}$　ج $\frac{\pi}{2}$　د $\frac{3\pi}{4}$

5 ژمارەیەکی ئاوێتە بەها ڕووتەکەی 2 وگۆشەی جەمسەری دەکاتە $\frac{\pi}{3}$ کام لەمانەی دێن نووسینی z بەشێوەی جەبرییە.

أ $\sqrt{3}+i$　ب $1+i\sqrt{3}$　ج $2+i\frac{\pi}{3}$　د $\sqrt{3}-i$

6 کۆمەڵەی شیکاری هاوکێشەی $z^2+z+1=0$ بریتییە لە (لەبیرت بێت کە $z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$.

أ کۆمەڵەی بەتاڵ .

ب $\left\{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

ج $\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

د $\left\{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right\}$

7 A و B دوو خاڵی دوو ژمارەی ئاوێتەی $a=1+i$ و $b=1-i$ کام لەمانەی دێن کۆمەڵەی خاڵەکانی M کە پاسادانی $|z_M-1-i|=|z_M-1+i|$ دەکات.

أ ڕاستەهێڵی AB .

ب ناوەڕاستی AB .

ج بازنەیەکە تیرەکەی $\overline{AB}$.

د تەوەری $\overline{AB}$

8 A ، B ، C خاڵن لە ڕووتەختی پۆوتاندا کە پاسادانی $z_A=z_C-z_B$ کام لەمانەی دێن ڕاستە؟

أ $OACB$ لاتەریبێکە، O خاڵی بنەڕەتە.

ب خاڵەکانی A ، B ، C لەڕێکی یەکترن.

ج A ناوەڕاستی $\overline{BC}$.

د B ناوەڕاستی $\overline{AC}$.

9 A و B دوو خاڵی دوو ژمارەی ئاوێتەی $a=1+i$ و $b=3-i$ کام لەمانەی دێن ڕاستە؟

أ $AB=2.82$　ب $AB=0$　ج $AB=\sqrt{10}-\sqrt{2}$　د $AB=2\sqrt{2}$

10 A و B دوو خاڵی دوو ژمارە ئاوێتەی $a=1+i$ و $b=3-i$ و H ناوەڕاستی $\overline{AB}$ و $h=z_H$ کام لەمانەی دێن ڕاستە.

أ $h=1-i$　ب $h=2$　ج $h=2-2i$　د $h=-2$

هەندێك زانیاری پێویست بۆ خوێندكار

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$
$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $= 1 - \sin^2 x$ $= \cos^2 x - 1$
$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
$\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = -\cos x$, $\tan(-x) = -\tan x$
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$

